学 校 代 码: 10385　　　　分类号:

研究生学号: 1000213004　　　　密　级:



硕 士 学 位 论 文

两类四阶微积分方程的数值解研究

Numerical investigation of two kinds of fourth-order integro-differential equations

作者姓名: 任全伟

指导教师: 庄清渠

学　　科: 基础数学

研究方向: 偏微分方程数值解法

所在学院: 数学科学学院

学位论文独创性声明

本人声明兹呈交的学位论文是本人在导师指导下完成的研究成果. 论文写作中不包含其他人已经发表或撰写过的研究内容, 如参考他人或集体的科研成果, 均在论文中以明确的方式说明. 本人依法享有和承担由此论文所产生的权利和责任.

论文作者签名: ____________ 签名日期: ________

学位论文版权使用授权声明

本人同意授权华侨大学有权保留并向国家机关或机构送交学位论文的复印件和电子版, 允许学位论文被查阅和借阅. 本人授权华侨大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索, 可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文.

论文作者签名: ________ 指导教师签名: ________

签 名 日 期: ________ 签 名 日 期: ________

摘 要

自然科学和工程技术等领域的许多问题都可用微积分方程模型来刻画. 随着计算机的出现和计算技术的发展, 微积分方程在各领域得到了广泛而有效的应用. 然而在大多数情况下, 微积分方程的解不能以解析的形式表达出来. 因此, 研究微积分方程的数值求解是有意义的.

本文首先对由吊桥模型所建立的四阶微分方程的数值解法进行探究. 给出了吊桥模型的有限差分逼近、有限元逼近和 Legendre-Galerkin 谱逼近. 分别利用 Newton 型迭代法和简单迭代方法处理方程中的积分项. 并对各求解方案进行了误差分析, 数值算例说明了算法的可行性.

其次, 对铰链梁横向振动模型所建立的四阶微分方程的数值解法进行了探究. 考虑了该方程的紧差分逼近和 Legendre-Galerkin 谱逼近. 分别利用 Newton 型迭代算法和简单迭代法处理方程中的积分项, 还对求解方案进行了误差分析, 数值算例说明了算法的可行性.

关键词: 四阶微积分方程　有限差分　有限元　Legendre-Galerkin 谱逼近　误差分析

Abstract

Many problems in natural science and engineering and other areas can be modeled by integro-differential equations. With the advent and fast development of computation technology, integro-differential equations have been widely and effectively used in many areas. However, in most cases, the analytical solutions of the integro-differential equations cannot be expressed explicitly. Therefore, it is meaningful to investigate the numerical solutions of the integro-differential equations.

In this paper, we consider firstly the numerical solution of the fourth-order integro-differential equation modeling the suspension bridge. The finite difference approximation, finite element approximation and Legendre-Galerkin spectral approximation of the equation are developed. Newton type iterative method and a simple iterative method are presented to deal with the integral term in the equation respectively. Error analysis of the above method are also carried out. Numerical examples are presented to show the feasibility of the methods.

Secondly, we consider the numerical solution of another fourth-order integro-differential equation, which was established in the study of transverse vibrations of a hinged beam. A compact finite difference scheme and a Legendre-Galerkin spectral method are presented to approximate the equation. Newton type iterative algorithm and a simple iterative algorithm are presented to deal with the integral term respectively. Error analysis of the methods are also carried out. The feasibility of the methods are confirmed by some numerical examples.

Key words: fourth-order integro-differential equation finite difference finite element Legendre-Galerkin spectral approximation error estimate

目 录

第1章 引言

数学和自然科学等领域中的很多问题最终都可归结为微分方程的研究, 如弦的平衡问题、热平衡问题、及多维波动问题[1]等. 人们也一直在使用微分方程模型来解释和预测各种自然现象. 微分方程在人们的生产生活中发挥着极其重要的作用. 然而只有少数比较简单的微分方程能够用初等解法进行求解. 大部分由实际问题建模得到的方程往往具有比较复杂的形式, 要找出其解的解析表达式是比较困难的甚至是不可能的. 有时方程的解虽能解析表达, 但其表达式往往比较复杂而不切实用. 况且在实际问题中往往也只要在一定的精度范围内求出微分方程的解在某些点的上的值, 并不一定要求出它的解析表达式. 因此研究微分方程的数值解法对生产生活有着重要的意义, 为微分方程寻求快速有效的解法也成为当今计算数学工作者的主要工作.

微分方程数值解法在数值分析中占有重要的地位. 有限差分, 有限元和谱方法是三种最主要的数值求解方法, 这几种方法的问世对微分方程数值解的研究起了极大的推动作用.

1928 年, Courant, Friedrich 与 Lewy 首先对差分算法作了完整的论述. 此后, 随着电子计算机的诞生与发展差分算法对线性微分方程定解问题已具有较完善的理论分析. 有限差分算法最常用的是利用差商代替导数或利用积分的形式来构造差分格式[2], 通过求解差分方程得到微分方程的近似解. 有限差分法是求解偏微分方程的主要方法, 如[3,4]等分别对椭圆型, 抛物型, 双曲型方程的有限差分解法做了详细的介绍.

有限元方法自 1943 年首次提出以来, 在动力学问题、稳定性问题、线性或非线性问题[5,6]得到了广泛的应用, 涉及医学、机电工程、物流运输、建筑等多个领域. 伴随着计算技术的发展和计算速度的不断提高, 以及大量的数学软件的出现使得有限元方法的理论和算法日趋完善. 有限元方法也成为科学计算中必不可少的工具.

谱方法产生于 20 世纪 70 年代, 最初由 Gottlieb 和 Orszag 在[7]中对谱方法作了全面的阐述. 谱方法的指数阶收敛性和应用的灵活性越来越受到计算工作者的青睐. 在过去的几十年中, 随着计算机的发展和快速 Fourier 变换的出现, 谱方法被广泛用于解决多种问题如天气预报, 量子力学, 流体力学, 石油勘探[8,9,10]等. 谱方法也是求解许多微积分方程[11,12,13,14]的重要工具. 谱方法的发展日趋成熟其理论也逐渐完善[15,16,17,18], 从而使谱方法在科学计算中发挥着重要的作用.

本文利用上述数值方法对如下两个微积分方程模型的数值解进行探究:

1. T.Von Karman 和 M.A.Biot 在[19]给出的吊桥模型

$$\begin{cases} C_1 y^{(4)} - y'' + C_2 \int_0^L y(x)dx = p(x), \qquad 0 < x < L, \\ y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 C_1, C_2 都是正常数，L 是吊桥的长度，$y(x)$ 是竖直方向的偏差位移. 本文假设 $p(x) \le 0$ (对于 $p(x) \ge 0$ 将得到类似的结论)，且为 $[0,L]$ 上的连续函数.

该四微积分方程已经存在一些研究工作，[20]给出了其混合有限元方法的误差分析；由于该模型求解的主要困难在于积分项的处理，[21,22]介绍了一种简单迭代格式来处理积分项，并给出了有限元逼近的数值结果，但未给出误差分析. 而且在计算过程中，简单迭代算法收敛速度不是很快，当区间分割较小时其计算过程将会耗用大量的时间. 本文将引入 Newton 型迭代法[23]来处理积分项，可以提高迭代的收敛速度，给出了该模型的有限差分逼近，有限元逼近. 并利用简单迭代算法，给出该模型的 Legendre-Galerkin 谱逼近，最后各种求解方案都通过数值算例来说明算法的可行性和有效性.

2. 在铰链梁的横向振动过程中[24, 25]可得如下四阶微积分方程:

$$\begin{cases} y^{(4)} - \varepsilon y'' - \dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2 dx\right) y'' = p(x), \qquad 0 < x < \pi, \\ y(0) = y(\pi) = y''(0) = y''(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 ε 是正常数，$p(x)$ 是 $[0,\pi]$ 上的连续函数且假设 $p(x) \le 0, \forall x \in [0,\pi]$. (对于 $p(x) \ge 0$ 也可得得到类似的结果).

该四阶微积分方程已经得到部分工作者的关注，如[26]给出了该方程的有限元逼近. 随后，[27]给出了该方程有限元逼近的误差分析. 最近，[28]提出了用牛顿型迭代法来求解该方程，大大提高了迭代的收敛速度. 本文将首先采用 Newton 型迭代法，构造紧差分格式对该方程进行求解且获得较好的收敛阶；其次利用简单迭代算法给出该方程的 Legendre-Galerkin 谱逼近，且通过数值算例来说明算法的可行性和有效性.

本文内容安排如下:

第 2 章给出了本文中所用的空间和范数的定义和一些常用的不等式及性质.

第 3 章包括以下内容:

第 3.1 节给出了(1.1)的有限差分逼近，并给出了差分逼近的误差分析最后通过数值算例说明算法的可行性；

第 3.2 节给出了(1.1)的有限元逼近，并给出了有限元逼近的误差分析最后通过数值算例说明算法的可行性；

第 3.3 节给出了(1.1)的 Legendre-Galerkin 谱逼近，并给出了谱逼近的误差分析最后通过数值算例说明算法的可行性；

第 4 章包括以下内容:

第 4.1 节给出了(1.2)的紧差分格式，并给出了紧差分格式的误差分析最后通过数值算例说明算法的可行性；

第 4.2 节给出了(1.2)的 Legendre-Galerkin 谱逼近，并给出了谱逼近的误差分析最后通过数值算例说明算法的可行性；

第 5 章对研究结果做进一步的总结.

第 2 章 预备知识及引理

2.1 一些空间与范数的定义

首先, 记$\Lambda=(a,b)$, $\overline{\Lambda}=[a,b]$. $L^p(\Lambda)$为p阶可积函数空间, 即$L^p(\Lambda)=\{v;$ $\|v\|_{L^p}<\infty\}$.

这里

$$\|v\|_{L^p}=\begin{cases}\left(\int_\Lambda |v|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p\le\infty,\\ \max\limits_{x\in\overline{\Lambda}}|v|, & p=\infty.\end{cases}$$

特别地, $L^2(\Lambda)$表示平方可积函数空间, 该空间的内积和范数定义如下:

$$(u,v)_\Lambda=\int_\Lambda u(x)v(x)dx,\quad \|u\|_\Lambda=(u,u)_\Lambda^{\frac{1}{2}}.$$

对任意的非负整数r, $H^r(\Lambda)$是通常意义下的 Sobolev 空间, 即

$$H^r(\Lambda)=\{u\in L^2(\Lambda):\partial_x u,\cdots,\partial_x^r u\in L^2(\Lambda)\}.$$

其半范数和全范数定义为:

$$|u|_{r,\Lambda}=\|\partial_x^r u\|_\Lambda,\quad \|u\|_{r,\Lambda}=\left(\sum_{k=0}^r |u|_{k,\Lambda}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

其中$\partial_x^r u=\dfrac{\partial^r u}{\partial x^r}$.

此外, $H^r(\Lambda)$的子空间$H_0^r(\Lambda)$的定义如下:

$$H_0^r(\Lambda)=\{u\in H^r(\Lambda):u(a)=u(b)=\partial_x u(a)=\partial_x u(b)=\cdots=\partial_x^{r-1}u(a)=\partial_x^{r-1}u(b)=0\}.$$

特别地, 当$r=1$时

$$H_0^1(\Lambda)=\{u\in H^1(\Lambda):u(a)=u(b)=0\}.$$

在不引起混淆的情况下, 下标Λ将省略不写.

记 $C^m = C^m(\Lambda)$ 是 m 阶导数连续函数空间. 当 $m=0$ 时，$C^m(\overline{\Lambda})$ 为连续函数空间，其范数定义为 $\| u \|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} | u(x) |$.

2.2 几个常用的不等式及引理

(i)Poincare 不等式

若 Ω 是 R^d 中的有界区域，则存在一个常数 $C = C(\Omega)$ 使得

$$\| u \| \le C \| \nabla u \|, \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

这里 $\nabla u = \text{grad} u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_d})$，特别地当 $\Omega = \Lambda$ 时可得

$$\| u \| \le C(\Lambda) \| u' \|, \ \ \forall u \in H_0^1(\Lambda). \tag{2.1}$$

在本文的证明过程中利用 $C(\Lambda) = \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{\sqrt{6}}$ 时的情形，其证明过程可参考 [4,27].

(ii) Cauchy-Schwartz 不等式

设 $1 < p, q < \infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x = \{x_n\} \in l^p$, $y = \{y_n\} \in l^q$，则 $x_n y_n \in l^1$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} | x_n y_n | \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

这里 p, q 称为共轭指数. l^p 为所有 p-阶可和的数列构成的集合. 即若 $x \in l^p$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p < \infty.$$

上述不等式称为 Hölder 不等式.

当 $p=q=2$ 时，由 Hölder 不等式可知，若 $x=\{x_n\}\in l^2, y=\{y_n\}\in l^2$，则有 $x_n y_n \in l^1$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $x, y\in C[a,b]$，且 $1<p,q<\infty$ 互为共轭指数，则可得连续的 Hölder 不等式

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

若 $p=q=2$，则可得连续的 Cauchy-Schwartz 不等式

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |y(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) 极值原理[29]

考虑如下两点边值问题

$$\mathrm{A}u := -(a(x)u')' + b(x)u' = f,\ x\in\Lambda.$$

$$u(a)=u_0,\ \ u(b)=u_1.$$

这里 $a(x), b(x), c(x)$ 都是光滑的函数，且

$$a(x)\ge a_0 > 0,\quad c(x)\ge 0, \forall x\in[a,b].$$

其中 a_0 是个正常数，则可得如下引理

若 $u\in C^2[a,b]$ 且满足

$$\mathrm{A}u \le 0(\mathrm{A}u \ge 0), \forall x\in\Lambda.$$

可得

(i)若 $c(x)=0$，则

$$\max_{x\in[a,b]} u = \max\{u(a),u(b)\}, \left(\min_{x\in[a,b]} u = \min\{u(a),u(b)\} \right).$$

(ii)若 $c(x) > 0$，则

$$\max_{x\in[a,b]} u \le \max\{u(a),u(b),0\}, \left(\min_{x\in[a,b]} u \ge \min\{u(a),u(b),0\} \right).$$

第 3 章 吊桥模型的数值解研究

本章针对究吊桥模型的数值解法进行探究. 分别给出了吊桥模型的有限差分逼近, 有限元逼近, Legendre-Galerkin 谱逼近数值求解方案. 对上述各求解方案, 分别从方程精确解已知和未知的情况下进行讨论, 由数值结果说明了求解方案在现实问题中的适用性.

在区间 $\Lambda=(0,L)$ 考虑吊桥模型. 首先, 令

$$\phi(x)=-y''(x).$$

则(1.1)可写成

$$\begin{cases} -C_1\phi''+\phi+C_2\int_0^L y(x)dx=p(x), & x\in\Lambda, \\ \phi(0)=\phi(L)=0, & \\ -y''-\phi=0, & x\in\Lambda, \\ y(0)=y(L)=0. & \end{cases} \tag{3.1}$$

则其弱形式可写为: 找 $(\phi,y)\in H_0^1(\Lambda)\times H_0^1(\Lambda)$, 使得

$$\begin{cases} -C_1(\phi',\varphi')+(\phi,\varphi)+C_2\int_0^L y(x)dx\int_0^L\varphi(x)dx=(p,\varphi), & \forall\varphi\in H_0^1(\Lambda), \\ \phi(0)=\phi(L)=0, & \\ (y',\eta')-(\phi,\eta)=0, & \forall\eta\in H_0^1(\Lambda), \\ y(0)=y(L)=0. & \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1 有限差分逼近

这部分对吊桥模型, 提出有限差分法进行求解. 利用 Newton 型迭代法处理积分项大大提高了收敛效率, 给出了差分逼近的误差分析, 数值算例说明了算法的可行性和有效性.

3.1.1 方程解的存在性

首先, 令

$$\xi = C_2\int_0^L y(x)dx. \tag{3.3}$$

然后将ξ看作一个未知数，则(3.1)可以写成如下形式

$$\begin{cases} -C_1\phi''+\phi+\xi = p(x), & 0<x<L, \\ \phi(0)=\phi(L)=0, & \\ -y''-\phi=0, & 0<x<L, \\ y(0)=y(L)=0. & \end{cases} \tag{3.4}$$

这里将ξ看作ϕ, y的参数，则可记

$$\phi=\phi(x,\xi),\ y=(x,\xi),\ \phi(x)=\phi(x,0),\ y(x)=y(x,0).$$

另外，记

$$g(\xi)=C_2\int_0^L y(x,\xi)dx.$$

则(3.3)可以写成一个非线性方程

$$\xi = g(\xi). \tag{3.5}$$

从而，原问题的求解可归结为求解(3.5)，因此需要进一步探讨$g(\xi)$的性质.

引理 3.1 函数$g(\xi)$是非正的，并且在区间$(-\infty,0]$上是非增的.

证明 假设$p(x)$的取值使得$p(x)-\xi\le 0$成立，由(3.4)和离散极大值原理[30]可得$\phi=\phi(x,\xi)<0,\ y=(x,\xi)<0$，从而$g(\xi)=C_2\int_0^L y(x,\xi)dx\le 0$，即$g(\xi)$是非正的.为证$g(\xi)$的单调性，取$\xi_1<\xi_2\le 0$，且令

$$\psi=\phi(x,\xi_2)-\phi(x,\xi_1), \qquad \eta=y(x,\xi_2)-y(x,\xi_1).$$

则由(3.4)可知ψ,η满足如下方程

$$\begin{cases} -C_1\psi''+\psi=(\xi_1-\xi_2), & 0<x<L, \\ \psi(0)=\psi(L)=0, & \\ -\eta''=\psi, & 0<x<L, \\ \eta(0)=\eta(L)=0. & \end{cases}$$

由极大值原理可知

$$\psi \le 0, \quad \eta \le 0, \quad \forall\ x \in [0, L].$$

即

$$\phi(x,\xi_2) \le \phi(x,\xi_1),\quad y(x,\xi_2) \le y(x,\xi_1).$$

从而

$$g(x,\xi_2) \le g(x,\xi_1).$$

所以 $g(\xi)$ 是非增的，证明完毕.

根据前面的假设, 来计算(3.4)的解析解. 由微分方程理论可知(3.4)的通解表示为

$$\phi = \phi(x,\xi) = (c_1(x) + \overline{c}_1)e^{-x\sqrt{\frac{1}{C_1}}} + (c_2(x) + \overline{c}_2)e^{x\sqrt{\frac{1}{C_1}}}. \tag{3.6}$$

这里

$$c_1(x) = \frac{\sqrt{C_1}}{2}\int_0^x e^{t\sqrt{\frac{1}{C_1}}}(p(t) - \xi)dt,$$

$$c_2(x) = \frac{\sqrt{C_1}}{2}\int_0^x e^{-t\sqrt{\frac{1}{C_1}}}(p(t) - \xi)dt.$$

其中 $\overline{c}_1, \overline{c}_2$ 都是常数. 由边界条件 $\phi(0) = \phi(L) = 0$ 可求得

$$\overline{c}_1 = -\frac{c_1(L) + c_2(L)e^{2L\sqrt{\frac{1}{C_1}}}}{1 - e^{2L\sqrt{\frac{1}{C_1}}}},\quad \overline{c}_2 = -\overline{c}_1.$$

由 $y'' = -\phi$, 分部积分可得

$$y' = y'(x,\xi) = \frac{2\overline{c}_1\cosh(x\sqrt{\frac{1}{C_1}})}{\sqrt{\frac{1}{C_1}}} - A(x) + \overline{c}_3,$$

$$y = y(x,\xi) = 2C_1\overline{c}_1\sinh(x\sqrt{\frac{1}{C_1}}) - B(x) + \overline{c}_3 x,$$

这里

$$A(x)=\int_0^x[c_1(t)e^{-t\sqrt{\frac{1}{C_1}}}+c_2(t)e^{t\sqrt{\frac{1}{C_1}}}]dt\,,\ B(x)=\int_0^x A(t)dt\,,$$

$$\overline{c}_3=\frac{1}{L}[B(L)+2C_1\overline{c}_1\sinh(L\sqrt{\frac{1}{C_1}})].$$

从而可知

$$g(\xi)=C_2\int_0^L(2C_1\overline{c}_1\sinh(x\sqrt{\frac{1}{C_1}}-B(x)+\overline{c}_3x)dx. \tag{3.7}$$

因此，在(3.5)的根存在的情况下，可以求得(1.1)的解析解.

由(3.7)及 $A(x)$, $\overline{c}_1$, $\overline{c}_3$ 的表达式可得如下引理:

引理3.2 函数 $g(\xi)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 是无穷次可微的.

接下来, 进一步探讨(3.5)的解的存在区间，为方便表述将弱形式(3.3)写成:

$$C_1(\phi',\varphi')+(\phi,\varphi)+C_2\int_0^L y(x)dx\int_0^L\varphi(x)dx=(p,\varphi),\quad \forall\,\varphi\in H_0^1(\Lambda). \tag{3.8}$$

$$(y',\eta')-(\phi,\eta)=0,\qquad \forall\,\eta\in H_0^1(\Lambda). \tag{3.9}$$

引理3.3 若 (ϕ,y) 分别是(3.8), (3.9)的解, 则

$$\|y'\|\le\frac{L}{2}\|\phi\|,\qquad \|\phi\|\le\frac{1}{1+(\frac{2}{L})^2C_1}\|p\|. \tag{3.10}$$

证明 首先在(3.9)中令 $\eta=y$，由Poincare不等式可得

$$\|y'\|^2\le\|\phi\|\cdot\|\|y\|\le\frac{L}{2}\|\phi\|\cdot\|y'\|.$$

从而可得

$$\|y'\|\le\frac{L}{2}\|\phi\|.$$

其次在(3.8)中令 $\varphi=\phi$，则由 $y(x)\le0,\phi(x)\le0$ 可得

$$C_1(\frac{2}{L})^2\|\phi\|^2+\|\phi\|\le C_1\|\phi'\|^2+\|\phi\|^2+C_2\int_0^L y(x)dx\int_0^L\phi(x)dx=(p,\phi)\le\|p\|\cdot\|\phi\|.$$

即

$$\|\phi\|\le\frac{1}{1+C_1(\frac{2}{L})^2}\|p\|.$$

证明完毕.

引理3. 4 在区间$[-\dfrac{C_2L^{\frac{5}{2}}\|p\|}{4(1+C_1(\frac{2}{L})^2)},0]$内, 方程(3.5)存在唯一解.

证明 令$f(\xi)=g(\xi)-\xi$. 由引理3.1知存在一个$\xi<0$，使得

$$f(\xi)=\int_0^L y(x,\xi)dx-\int_0^L y(x,0)dx\geq 0.$$

另外, 由引理3.1, 引理3.2可知

$$f'(\xi)=g'(\xi)-1\leq 1,\qquad \forall\,\xi\leq 0.$$

所以$f(\xi)$在$(-\infty,0]$是递减的. 而$f(0)=g(0)-0<0$由根的存在性定理可知方程

$f(\xi)=0$在$[\xi,0]$之间存在唯一的一个根ξ^*, 即

$$\xi^*=g(\xi^*)=C_2\int_0^L y(x,\xi^*)dx.$$

由引理3.3和Poincare不等式可得

$$|\xi^*|\leq C_2L^{\frac{1}{2}}\|y\|\leq\frac{C_2L^{\frac{3}{2}}}{2}\|y'\|\leq\frac{C_2L^{\frac{5}{2}}\|p\|}{4(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}.$$

因此有

$$-\frac{C_2L^{\frac{5}{2}}\|p\|}{4(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}\leq\xi^*\leq 0.$$

证明完毕.

由引理3.6可得如下定理:

定理3. 1 当$C_1,C_2>0$，且在$[0,L]$上$p(x)\leq 0$时，(1.1)存在唯一的古典解.

注：在求解$g(\xi)$的过程中，可能会出现两种情况：

• 若$g(\xi)$的显式表达式是可以求得的，则可求出(3.5)的精确解或者由简单的迭代算法ξ来求出的数值解，然后通过求解问题(3.4)来找到(1.1)的解.

• 若在计算过程中，由积分项(3.6)-(3.7)很难求出 $g(\xi)$ 的表达式，则采用下文给出的迭代解法先求解(3.5)，再求解(3.4).

3.1.2 方程的求解

在很多情况下，方程(3.5)的古典解是难以求得的，因此研究其数值解法就显重要．在这部分将采用牛顿迭代法来处理非线性项，也就是用迭代算法来求解 $f(\xi)=g(\xi)-\xi=0$，即

$$\xi_{k+1}=\xi_k-\frac{f(\xi_k)}{f'(\xi_k)},\ k=0,1,\cdots;\quad \xi_0\le 0. \tag{3.11}$$

如前所述，设 ξ^* 是方程 $f(\xi)=0$ 的根．由引理3.4可知，$f(\xi)$ 在 ξ^* 的邻域内具有连续的二阶导数且在 ξ^* 的邻域内 $f'(\xi)\ne 0$．由Newton迭代法局部收敛性定理可知(3.1)产生的序列收敛于根 ξ^*．方程(3.4)的具体迭代求解过程如下:

(i) 给定初始值 ξ_0，例如

$$\xi_0=0.$$

(ii) 已知 $\xi_k(k=0,1,2,\cdots)$，可依次解下列方程组

$$\begin{cases}-C_1\phi_k''+\phi_k=p(x)-\xi_k, & 0<x<L,\\ \phi_k(0)=\phi_k(L)=0, & \\ -y_k''=\phi_k, & 0<x<L,\\ y_k(0)=y_k(L)=0. & \end{cases} \tag{3.12}$$

(iii) 根据(3.11)计算 ξ_{k+1}，其中

$$f(\xi_k)=g(\xi_k)-\xi_k=C_2\int_0^L y_k dx-\xi_k.$$

(iv) 若 $|\xi_k-\xi_{k+1}|<$ TOL(TOL为迭代控制精度), 迭代终止. 否则令 $\xi_k=\xi_{k+1}$ 重复(ii).

事实上，文献[24]所用的迭代算法

$$\xi_{k+1}=\xi_k+\omega(C_2\int_0^L y_{k+1}(x)dx-\xi_k).$$

可以看作是

$$\xi=\xi+\omega f(\xi).$$

这是一般的迭代法，使用Newton型迭代法可加速迭代收敛速度.

下面详细叙述(3.4)的差分法求解过程.

首先，将区间$[0,L]$进行均匀分割，记$\kappa=\{x_i=ih,i=0,1,2,\cdots,N;h=L/N\}$，则原方程可等价为

$$\begin{cases}-\Lambda\Phi_k^h+\Phi_k^h=p(x_i)-\xi_k, & i=1,2,\cdots,N-1,\\ \Phi_k^h(0)=\Phi_k^h(L)=0, & \\ -\Lambda y_k^h=\Phi_k^h(x_i), & i=1,2,\cdots,N-1,\\ y_k^h(0)=y_k^h(L)=0. & \end{cases} \tag{3.13}$$

这里Φ_k^h,y_k^h是定义在κ上的节点函数，$\phi_i=\phi(x_i)$，Λ是二阶差分算子，也就是

$$(\Lambda\phi)_i=\frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{h^2}.$$

容易验证该差分算子是平方阶收敛的，即

$$(\Lambda\phi)_i=\frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{h^2}=\phi_i''+o(h^2). \tag{3.14}$$

在计算过程中要更新ξ_{k+1}的值. 由(3.1)知，需计算$f(\xi_k),f'(\xi_k)$的值，由于很难求得它们的具体表达式，采用数值积分来计算$f(\xi_k)$，即

$$f(\xi_k)\approx C_2h\sum_{i=1}^{N-1}y_k^h(x_i)-\xi_k. \tag{3.15}$$

对于$f'(\xi_k)$采用差商的形式进行替代，下文中分别称之为Newton法1，Newton法2, Newton法3.

$$f'(\xi_k)\approx\frac{f(\xi_k+h)-f(\xi_k)}{h}. \tag{3.16}$$

$$f'(\xi_k)\approx\frac{f(\xi_k)-f(\xi_k-h)}{h}. \tag{3.17}$$

$$f'(\xi_k) \approx \frac{f(\xi_k + h^2) - f(\xi_k)}{h^2}. \tag{3.18}$$

从而可以求得(3.4)的数值解.

3.1.3 误差分析

为估计精确解 y 和数值解之间的误差. 定义在节点 κ 上的函数 f 的范数定义为 $\| f \|_{C(\kappa)} = \max_{x_i \in \kappa} | f(x_i) |$. M在不同的式子中可能代表不同的常数.

定理3.2 若 y 和 y_k 分别是(3.4)和(3.12)的解, 则

$$\| y - y_k \|_{H^2} \le M | \xi_k - \xi |; \tag{3.19}$$

$$\| y - y_k \|_C \le M | \xi_k - \xi |; \tag{3.20}$$

$$\| y_{k+1} - y_k \|_{H^2} \le M | \xi_k - \xi_{k+1} |; \tag{3.21}$$

$$\| y_{k+1} - y_k \|_C \le M | \xi_k - \xi_{k+1} |. \tag{3.22}$$

证明 假设 Φ 是(3.4)的解, 令 $\eta_k = y_k - y$, $\psi_k = \Phi_k - \Phi$, 则 η_k, ψ_k 满足

$$\begin{cases} -C_1 \psi_k'' + \psi_k = -(\xi_k - \xi), & 0 < x < L, \\ \psi_k(0) = \psi_k(L) = 0, & \\ -\eta_k'' = \psi_k, & 0 < x < L, \\ \eta_k(0) = \eta_k(L) = 0. & \end{cases}$$

由椭圆型方程理论[31]可知

$$\| \psi_k \|_{H^2} \le M | \xi_k - \xi |, \qquad \| \eta_k \|_{H^2} \le M | \psi_k |.$$

因为 $\| \psi_k \| \le \| \psi_k \|_{H^2}$, 所以 $\| \eta_k \|_{H^2} \le M \| \psi_k \|_{H^2}$. 则可得

$$\| \eta_k \|_{H^2} \le M | \xi_k - \xi |.$$

又因为 $H^2(I)$ 连续嵌入 $C(I)$ [31], 由(3.19)可知(3.20)成立. (3.21), (3.22)的证明类似于(3.19), (3.20), 证明完毕.

定理3. 3 若 y 是(1.1)的精确解， y_k^h 是差分方程(3.13)的解，则

$$\| y - y_k^h \|_{c_\kappa} \le M_1 h^2 + M_2 | \xi_k - \xi |, \tag{3.23}$$

$$\| y_{k+1}^h - y_k^h \|_{c_\kappa} \le \frac{| \xi_{k+1} - \xi_k | L^2}{4\sqrt{2}}. \tag{3.24}$$

证明 由三角不等式可得

$$\| y - y_k^h \|_{c_\kappa} \le \| y - y_k \|_{c_\kappa} + \| y_k - y_k^h \|_{c_\kappa}.$$

由于上述差分算法(3.14)具有二阶收敛性，则

$$\| y_k - y_k^h \|_{c_\kappa} \le M_1 h^2.$$

结合定理3.2可得(3.23).

令 $\eta_k = y_{k+1}^h - y_k^h$， $\psi_k = \Phi_{k+1}^h - \Phi_k^h$, 则 η_k, ψ_k 满足

$$\begin{cases} -C_1 \Lambda \psi_k + \psi_k = -(\xi_{k+1} - \xi_k), & x \in \kappa, \\ \psi_k(0) = \psi_k(L) = 0, \\ -\Lambda \eta_k = \psi_k, & x \in \kappa, \\ \eta_k(0) = \eta_k(L). \end{cases}$$

由极值原理可得

$$\| \psi_k \|_{c_\kappa} \le | \xi_{k+1} - \xi_k |.$$

另外, 由[32](p.113)可得

$$\| \eta_k \|_{c_\kappa} \le \frac{L^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}} \| \psi_k \|_{l^2(\kappa)}.$$

这里

$$\| \psi_k \|_{l^2(\kappa)} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h \| \psi_k(x_i) \|_{c_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

另外, 由于

$$\| \psi_k \|_{l^2(\kappa)} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h \| \psi_k \|_{c_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{L} \| \psi_k \|_{c_\kappa}.$$

从而可得

$$\| y_{k+1}^h - y_k^h \|_{c_\kappa} \le \frac{L^2}{4\sqrt{2}} \| \psi_k \|_{c_k}.$$

即(3.24)得证，证明完毕.

3.1.4 数值结果

在这部分将用数值算例来验证算法的收敛性. 为便于表达和计算，在(1.1)中选取参数 $C_1 = C_2 = L = 1$，$p(x)$ 为定义在均匀网格上的函数，在迭代求解的过程中当 $|\xi_{k+1} - \xi_k| \le \text{TOL}$ 时，迭代终止. 用上述迭代方法和[22](取 $\omega = 0.4$)的简单迭代法的数值结果作比较.

例**3.1** $p(x) = -\pi^4 \sin \pi x - \pi^2 \sin \pi x - \dfrac{2}{\pi}$,

分别取TOL=10^{-8}，TOL=10^{-14} 和 $h = 0.01$，相应的数值结果在表3.1-3.2给出，此时方程的精确解为 $y(x) = -\sin(\pi x)$.

首先验证算法的收敛性. 表3. 1给出的是TOL=10^{-14} 时误差随 h 的变化关系. 由表易见数值解关于 h 平方收敛.

表3.1:TOL=10^{-14}, Newton法1所得(例1)的数值结果.

N	k	ξ_k	$\|y - y_{k-1}\|_\infty$
10	3	-0.6413	1.577e-002
20	3	-0.6378	3.917e-003
40	3	-0.6369	9.778e-004
80	4	-0.6367	2.443e-004
160	4	-0.6366	6.108e-005
320	4	-0.6366	1.527e-005

表3.2: TOL=10^{-8}, $h = 0.01$ 的数值结果.

Method	k	$\|y_k - y_{k-1}\|_\infty$	$\|y - y_{k-1}\|_\infty$	ξ_k
Newton法1	3	6.6613e-016	1.5638e-004	-0.6367
Newton法2	3	5.5511e-016	1.5638e-004	-0.6367
B.Semper	35	1.2256e-010	1.5638e-004	-0.6367

表3. 3: TOL=10^{-14}, $h=0.01$的数值结果.

Method	k	$\|y_k-y_{k-1}\|_\infty$	$\|y-y_{k-1}\|_\infty$	ξ_k
Newton法1	4	0.0000e-000	1.5638e-004	-0.6367
Newton法2	4	0.0000e-000	1.5638e-004	-0.6367
B. Semper	61	9.9921e-016	1.5638e-004	-0.6367

注：由表3.2-3.3可以看出，在节点个数和迭代精度相同的情况下，Newton型迭代法的收敛速度比Semper迭代法快得多．但是需要指出的是Newton型迭代法需要求解方程(3.31)两次（ξ_k 和 ξ_k+h 或 ξ_k-h），而B.Semper迭代法只需求解一次.

在实际应用中，(1.1)的解析解一般很难求得，因此求其数值解就显得特别重要．如下面的两种情况，其解析解是难以求得的.

例3. **2** $p(x)=-x^3$.

例3. **3** $p(x)=-2$.

图3. 1给出当 $N=30$, TOL=10^{-6}，利用Newton法1所得 ϕ, y 的数值结果

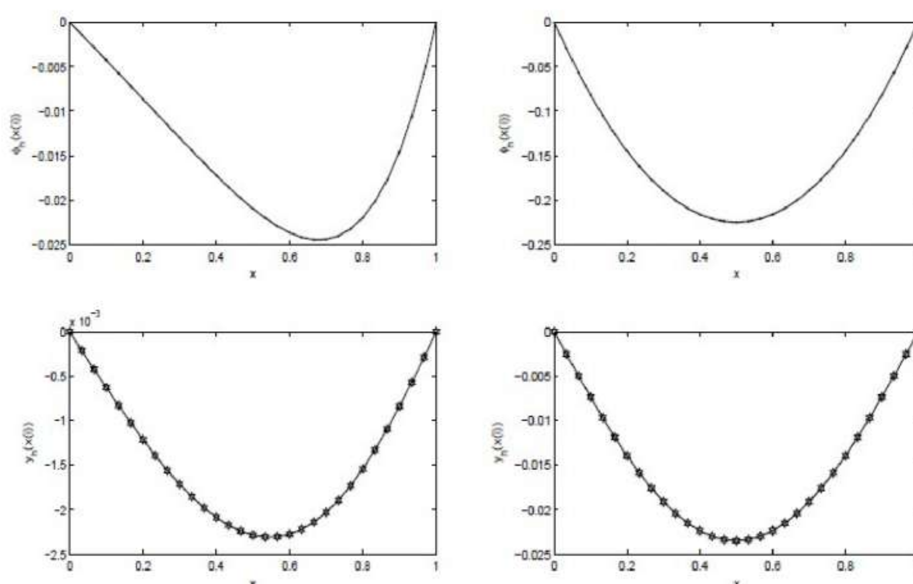


图3. 1: N=30时, ϕ 和 y 的数值解: $p(x)=-x^3$ (左)； $p(x)=-2$ (右).

注:该部分已整理在华侨大学学报自然科学版,第33卷第6期发表.

3.2 有限元逼近

这部分给出了吊桥模型在逐段线性多项式空间上的有限元逼近. 引入 Newton 迭代法来处理积分项, 大大提高了收敛速度. 并给出相应的误差分析且通过数值算例说明方法的可行性.

3.2.1 有限元逼近的弱形式

为了给出(1.01)的有限元逼近形式, 首先对区间Λ进行均匀剖分令$h=L/n$为分割区间的长度, 即

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=L.$$

其中$x_k=kh$, 令$\Lambda_k=(x_{k-1},x_k), k=1,2,3,\cdots,n$, 则$\overline{\Lambda}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{\Lambda}_k$.

设P^m为次数不超过m的多项式空间. 构造分片线性多项式空间X_0^h使其满足方程的边界条件, 则可以写成

$$X_0^h=\{u_h\in C[0,L]\,|\,u_h|_{\Lambda_k}\in P^1(\Lambda_k), 1\le k\le n;\text{且}u_h(0)=u_h(L)=0\}.$$

因$X_0^h\subset H_0^1(\Lambda)$, 即$X_0^h$是$H_0^1(\Lambda)$的子空间. 则(3.03)有限元逼近形式为找:

$(\phi_h,y_h)\in X_0^h\times X_0^h$, 使得

$$\begin{cases}-C_1(\phi'_h,\varphi')+(\phi_h,\varphi)+C_2\int_0^L y_h(x)dx\int_0^L\varphi(x)dx=(p,\varphi), & \forall\varphi\in X_0^h,\\ (y'_h,\eta')-(\phi_h,\eta)=0, & \forall\eta\in X_0^h,\end{cases}\tag{3.25}$$

文献[21]给出了(3.25)解的存在性的证明, 下面利用极值原理来说明其解的唯一性.

定理 **3.4** 若$(\phi_1,y_1),(\phi_2,y_2)$都是(3.25)的解, 则它们是相等的.

证明 由假设与(3.25)可得

$$-C_1((\phi_1-\phi_2)',\varphi')+(\phi_1-\phi_2,\varphi)+C_2\int_0^L(y_1-y_2)dx\int_0^L\varphi(x)dx=0,\quad\forall\varphi\in X_0^h,\tag{3.26}$$

$$((y_1-y_2)',\eta')-(\phi_1-\phi_2,\eta)=0,\qquad\forall\eta\in X_0^h,\tag{3.27}$$

若 $(y_1,1)=(y_2,1)$，则 $\int_0^L(y_1-y_2)dx=0$．在(3.26)中令 $\varphi=\phi_1-\phi_2$ 则可得 $\phi_1=\phi_2$，再由(3.27)可知 $y_1=y_2$.

不失一般性，假设 $(y_1,1)>(y_2,1)$，则 $-C_2\int_0^L(y_1-y_2)dx<0$，由(3.26)及极大值原理可得 $\phi_1-\phi_2\le 0$，由(3.27)可得 $y_1-y_2\le 0$，从而 $(y_1,1)\le(y_2,1)$，与假设相矛盾，定理得证.

3.2.2 迭代求解

在(3.25)中由于积分项的存在，直接计算将会给求解带来些困难．因此，引入 Newton 型迭代格式可以处理积分项．同样令 $\xi=C_2\int_0^L y(x)dx$，则(3.25)可等价地写成：找 $(\phi_h,y_h)\in X_0^h\times X_0^h$，使得

$$\begin{cases}C_1(\phi'_h,\varphi')+(\phi_h,\varphi)=(p-\xi,\varphi), & \forall\varphi\in X_0^h,\\(y'_h,\eta')-(\phi_h,\varphi)=0, & \forall\eta\in X_0^h.\end{cases}\tag{3.28}$$

这里将 ξ 看作 ϕ,y 的参数，可记 $\phi=\phi(x,\xi),\ y=(x,\xi)$ 且

$$\phi(x)=\phi(x,0),\ y(x)=y(x,0).$$

另外，记

$$g(\xi)=C_2\int_0^L y(x,\xi)dx.\tag{3.29}$$

则(3.29)可以写成一个非线性方程

$$\xi=g(\xi).\tag{3.30}$$

则原问题的求解归结为求解(3.30)．在求解过程中，可能会遇到下面两种情况：

- (3.30)的解析解容易求得，则由(3.28)可求出(1.1)的解.
- (3.30)的解析解不容易求或者求不出，则需采用其它方法进行求解，采用牛顿迭代法求其数值解，进而求解(1.1).

记 $f(\xi)=g(\xi)-\xi$，则求解(3.30)可归结为 $f(\xi)=0$，其 Newton 迭代格式为

$$\xi_{k+1}=\xi_k-\frac{f(\xi_k)}{f'(\xi_k)},\ \ k=0,1,\cdots.$$

因此, (3.28)的迭代计算过程是: 找$(\phi_h^k, y_h^k) \in X_0^h \times X_0^h$使得

$$\begin{cases} C_1((\phi_h^k)', \varphi') + (\phi_h^k, \varphi) = (p - \xi_k, \varphi), & \forall \varphi \in X_0^h, \\ ((y_h^k)', \eta') - (\phi_h^k, \varphi) = 0, & \forall \eta \in X_0^h. \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\xi_{k+1} = \xi_k - \frac{f(\xi_k)}{f'(\xi_k)}$$

由上式可知, 在迭代过程中需要计算$f(\xi_k)$, $f'(\xi_k)$的值, 由于$f(\xi)$的显式表达式难以求得. 同有限差分估计, 分别采用数值积分和数值微分的形式来来计算$f(\xi_k)$, $f'(\xi_k)$, 则通过求解(3.31)看求得(1.1)的数值解.

3.2.3 误差估计

首先, 令$P_{1,h}^0 y$, $\widetilde{P}_{1,h}^0 \phi$分别表示$\phi$, $y \in H_0^1(\Lambda)$到空间X_0^h上的投影算子, 且定义如下

$$((y - P_{1,h}^0 y)', \eta') = 0. \tag{3.32}$$

$$C_1((\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0 \phi), \varphi') + (\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0 \phi, \varphi) = 0. \tag{3.33}$$

由[33]可知其满足如下性质

$$\| (y - P_{1,h}^0 y)' \| \le C \| y'' \|, \quad \| \phi - \widetilde{P}_{1,h}^0 \phi \| \le Ch \| \phi' \|. \tag{3.34}$$

此外, 由(3.2), (3.25)可得

$$C_1((\phi - \phi_h)', \varphi') + (\phi - \phi_h, \varphi) + C_2 \int_0^L (y - y_h) dx \int_0^L \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in X_0^h, \tag{3.35}$$

$$((y - y_h)', \eta') - (\phi - \phi_h, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in X_0^h. \tag{3.36}$$

引理 3.5　若$(\phi, y), (\phi_h, y_h)$分别是(3.2), (3.25)的解, $P_{1,h}^0$, $\widetilde{P}_{1,h}^0$分别是(3.32), (3.33)中的投影算子, 则可得

$$\| P_{1,h}^0 y - y_h \| \le \frac{L}{2} \| \phi - \phi_h \|. \tag{3.37}$$

$$\| \widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h \| \le \frac{C_2}{1 + C_1(\frac{2}{L})^2} \| y - y_h \|. \tag{3.38}$$

证明 对于(3.37)，在(3.36)中令 $\eta = P_{1,h}^{0} y - y_h$，由(3.32)和 Poincare 不等式可得

$$\| (P_{1,h}^{0} y - y_h)' \|^2 \le \| \phi - \phi_h \| \cdot \| P_{1,h}^{0} y - y_h \| \le \frac{L}{2} \| \phi - \phi_h \| \cdot \| (P_{1,h}^{0} y - y_h)' \|.$$

即

$$\| (P_{1,h}^{0} y - y_h)' \| \le \frac{L}{2} \| \phi - \phi_h \|.$$

对于(3.38)，由(3.33), (3.35)可得

$$C_1((\widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h)', \varphi') + (\widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h, \varphi) = C_1((\phi - \phi_h)', \varphi') + (\phi - \phi_h, \varphi) == -C_2 \int_0^L (y - y_h) dx \int_0^L \varphi dx.$$

在上式中令 $\varphi = \widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h$，则

$$C_1(\frac{2}{L})^2 \| \widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h \|^2 + \| \widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h \|^2 \le C_1 \| (\widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h)' \|^2 + \| \widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h \|^2 \le C_2 L \| y - y_h \| \cdot \| \widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h \|.$$

因此

$$(1 + C_1(\frac{2}{L})^2) \| \widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h \| \le C_2 L \| y - y_h \|.$$

即

$$\| \widetilde{P}_{1,h}^{0}\phi - \phi_h \| \le \frac{C_2 L}{1 + C_1(\frac{2}{L})^2} \| y - y_h \|.$$

证明完毕.

定理 3.5 若 $\frac{C_2 L^3}{4(1 + C_1(\frac{2}{L})^2)} < 1$，则有如下结论成立

$$\| (y - y_h)' \| = O(h). \tag{3.39}$$

$$\| (\phi - \phi_h)' \| = O(h). \tag{3.40}$$

证明 对于(3.39)，由(2.1)，引理 3.5 和三角不等式可得

$$\|(P_{1,h}^0 y - y_h)'\| \le \frac{L}{2}\|\phi - \phi_h\| \le \frac{L}{2}\|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \frac{L}{2}\|\phi_h - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\|$$

$$\le \frac{L}{2}\|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \frac{C_2 L^2}{2(1 + C_1(\frac{2}{L})^2)}\|y - y_h\|.$$

$$\le \frac{L}{2}\|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \frac{C_2 L^2}{2(1 + C_1(\frac{2}{L})^2)}\|y - P_{1,h}^0 y\| + \frac{C_2 L^3}{4(1 + C_1(\frac{2}{L})^2)}\|(P_{1,h}^0 y - y_h)'\|.$$

即

$$(1 - \frac{C_2 L^3}{4(1 + C_1(\frac{2}{L})^2)}\|(P_{1,h}^0 y - y_h)'\|) \le \frac{L}{2}\|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \frac{C_2 L^2}{2(1 + C_1(\frac{2}{L})^2)}\|y - P_{1,h}^0 y\|.$$

当 $\frac{C_2 L^3}{4(1 + C_1(\frac{2}{L})^2)} < 1$ 时可得

$$\|(P_{1,h}^0 y - y_h)'\| \le M(\|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \|y - P_{1,h}^0 y\|).$$

由上式和三角不等式可知

$$\|(y - y_h)'\| \le \|(P_{1,h}^0 y - y)'\| + \|(P_{1,h}^0 y - y_h)'\| \le M(\|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \|(y - P_{1,h}^0 y)'\|) \ .$$

由(3.34)可得 $\|(y - y_h)'\| = O(h)$.

对于(3.40)，由引理 3.5 可知

$$\|\phi - \phi_h\| \le \|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \|P_{1,h}^0\phi - \phi_h\| \le \|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \frac{C_2 L^2}{1 + C_1(\frac{2}{L})^2}\|y - y_h\|$$

$$\le \|\phi - \widetilde{P}_{1,h}^0\phi\| + \frac{C_2 L^2}{2(1 + C_1(\frac{2}{L})^2)}(\|(y - P_{1,h}^0 y)'\| + \|(P_{1,h}^0 y - y_h)'\|).$$

由式(3.34)和(3.39)可得 $\|\phi - \phi_h\| = O(h)$，证明完毕.

3.2.4 数值结果

在这部分，数值算例来验证算法的收敛性和可行性，为便于表达和计算，在(1.1)中选取 $C_1=C_2=L=1$，在迭代求解过程中当 $|\xi_{k+1}-\xi_k|\le \text{TOL}$ 时，迭代终止. 下面利用上述迭代方法和[22](取 $\omega=0.4$)中迭代算法的数值结果作比较.

例 **3.4** $p(x)=-\pi^4\sin(\pi x)-\pi^2\sin(\pi x)-\dfrac{2}{\pi}$，此时方程的精确解 $y=-\sin(\pi x)$，

$\phi=-\pi^2\sin(\pi x)$.

首先验证算法的收敛性，表 3.4 给出的是 $\text{TOL}=10^{-14}$ 时误差随 h 的变化关系，由表易见数值解关于 h 平方收敛.

表 3.4:TOL$=10^{-14}$，由 Newton1 所得(例 3.25)的数值结果.

n	10	20	40	80	160	320
$\|\|y-y_{k-1}\|\|_\infty$	9.019e-003	2.246e-003	5.611e-004	1.402e-004	3.506e-005	-0.6366243
$\|\|\phi-\phi_{k-1}\|\|_\infty$	7.385e-003	1.851e-003	4.632e-004	1.158e-004	6.108e-005	1.527e-005

再取 $h=0.01$，$h=0.001$ 和 TOL=10^{-8} 进行计算，相应的数值结果在表 3.5 与表 3.6 中给出. 由表可见，在节点个数和迭代精度相同的情况下, Newton 型迭代法收敛速度比 Semper 迭代法快的多.

表 3.5: TOL$=10^{-8}$，$h=0.01$ 的数值结果.

Method	k	$\|\|y-y_{k-1}\|\|_\infty$	$\|\|\phi-\phi_{k-1}\|\|_\infty$	ξ_k
Newton法1	3	8.9761e-005	7.4136e-005	-0.6366
Newton法3	3	8.9761e-005	7.4136e-005	-0.6366
B.semper	35	8.9761e-005	7.4138e-005	-0.6366

表 3.6: TOL$=10^{-8}$，$h=0.001$ 的数值结果.

Method	k	$\|\|y-y_{k-1}\|\|_\infty$	$\|\|\phi-\phi_{k-1}\|\|_\infty$	ξ_k
Newton法1	3	8.9757e-007	7.4141e-007	-0.6366
Newton法3	3	8.9757e-007	7.4142e-007	-0.6366
B.semper	61	8.9757e-007	7.4315e-007	-0.6366

例 **3.5**　$p(x)=11/4-(6e+6e^{-1}-12)/(e-e^{-1})-6x$，此时(1.1)的精确解为:

$y=5x-(6e^{x}-6e^{-x})/(e-e^{-1})+x^{3}$，$\phi=(6e^{x}-6e^{-x})/(e-e^{-1})-6x$.

表 3.7 与 3.8 分别给出了当 TOL=10^{-6}, $h=0.01, 0.001$ 的数值结果. 由表可见，在节点个数和迭代精度相同的情况下, Newton 型迭代法的收敛速度比 Semper 迭代法快得多.

表 3.7：TOL$=10^{-6}$，$h=0.01$ 的数值结果.

Method	k	$\| y-y_{k-1} \|_\infty$	$\| \phi-\phi_{k-1} \|_\infty$	ξ_k
Newton法1	3	3.1789e-006	2.6346e-006	-0.0227
Newton法3	3	3.1789e-006	2.6346e-006	-0.0227
B.semper	19	3.2030e-006	2.8654e-006	-0.0227

表 3.8: TOL$=10^{-6}$，$h=0.001$ 的数值结果.

Method	k	$\| y-y_{k-1} \|_\infty$	$\| \phi-\phi_{k-1} \|_\infty$	ξ_k
Newton法1	3	3.1790e-008	2.6346e-008	-0.0227
Newton法3	3	3.1790e-008	2.6346e-008	-0.0227
B.semper	19	5.6277e-008	2.6377e-007	-0.0227

注: 从表 3.4-3.8 可以看出:

- 在相同的条件下, Newton 型迭代法收敛速度比 Semper 所采用的迭代法收敛速度快的多. 不过需要指出的是，由于 Newton 型迭代法需计算(3.16)或(3.18)值,因此计算过程中需要求解两次方程组(ξ_k+h 和 ξ_k+h^2).

- 由上述迭代法所得的数值结果和理论分析是一致的.

在实际应用中，有时难以求得(1.1)的精确解，下面从精确解未知的情况下来说明上述迭代算法的适用性.

例 **3.6**　$p(x)=-x^2$, 2. 方程的精确解难以求得. 图(3.2)分别给出了当 $m=30$，TOL=10^{-8} 时，由 Newton 法 3 所得的数值解 y 和 ϕ 的数值结果.

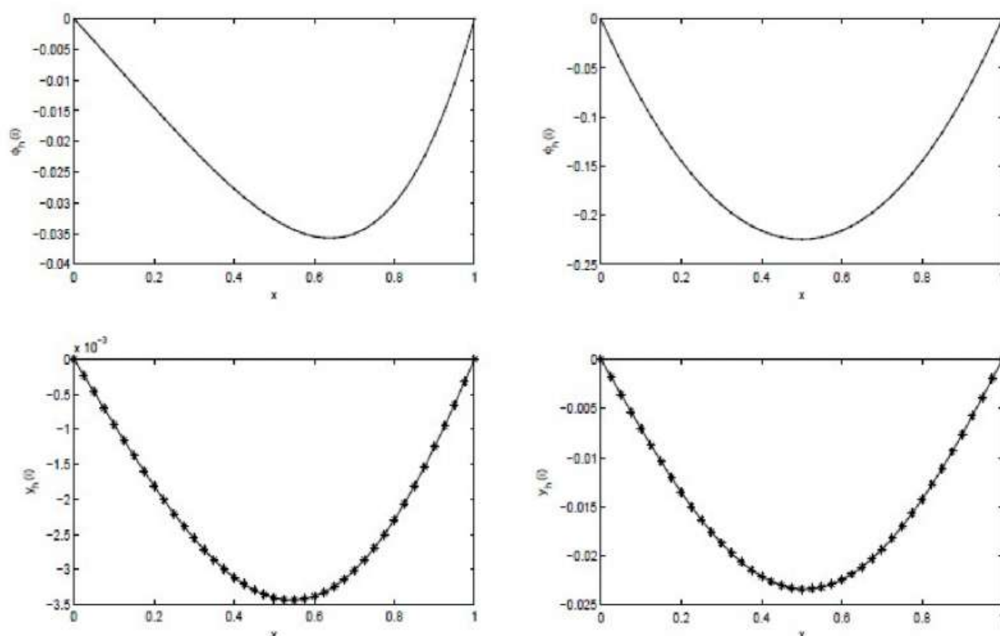


图 3.2 $m=30$ 时，ϕ 和 y 的数值解: $p(x)=-x^2$ (左)， $p(x)=-2$ (右).

注: 该部分内容已整理被福州大学学报自然科学版录用.

3.3 Legendre-Galerkin 谱逼近

这部分给出了吊桥模型 Legendre-Galerkin 谱逼近形式, 利用简单迭代法进行求解. 并给出了迭代收敛性的证明和求解方案的误差分析, 最后用数值算例说明算法的可行性.

3.3.1 Legendre-Galerkin 谱逼近的弱形式

记 $L_i(x)$ 为 i 阶的 Legendre 多项式, 令

$$X_N = \mathrm{Span}\{L_0(x), L_1(x), \cdots, L_N(x)\}, \quad X_N^0 = X_N \cap H_0^1(\Lambda).$$

则方程(3.2)的 Legendre-Galerkin 谱逼近形式为: 找 $(\phi_N, y_N) \in X_N^0 \times X_N^0$, 使得

$$\begin{cases} -C_1(\phi_N^{'},\varphi_N^{'})+(\phi_N,\varphi_N)+C_2\int_0^L y_N(x)dx\int_0^L \varphi_N(x)dx=(p,\varphi_N), & \forall \varphi \in X_N^0, \\ \phi_N(0)=\phi_N(L)=0, & \\ (y_N^{'},\eta_N^{'})-(\phi_N,\eta_N)=0, & \forall \eta \in X_N^0. \\ y_N(0)=y_N(L)=0. & \end{cases} \tag{3.41}$$

方程(3.41)最终所对应的线性系统取决于空间 X_N^0 的基函数的选取，为构建一个合适的基函数，将利用 Legendre 多项式的正交性. 首先利用线性变换

$$\hat{x}:=\hat{x}(x)=\frac{2}{L}x-1, \forall \ x\in\Lambda.$$

将区间 Λ 变换到参考区间 $\hat{\Lambda}=(-1,1)$，仿照[34,35]，对于 $j=0,1,2,\cdots,N-2$，令

$$\psi_j(x)=d_j(L_j(\hat{x})-L_{j+2}(\hat{x})), x\in\Lambda.$$

这里 $d_j=\dfrac{1}{\sqrt{4j+6}}$，则空间 X_N^0 可以表示为如下形式:

$$X_N^0=\text{span}\{\psi_0(x),\psi_1(x),\cdots,\psi_{N-2}(x)\}.$$

下面推导方程(3.41)的矩阵形式，为此，记

$$\gamma_k=\frac{2}{2k+1}, a_{ij}=(\psi_j^{'},\psi_i^{'}), b_{ij}=(\psi_j,\psi_i).$$

由 Legendre 多项式的正交性可得

$$a_{ij}=a_{ji}=\begin{cases}\dfrac{2}{L}, j=i, \\ 0, j\neq i,\end{cases} \qquad b_{ij}=b_{ji}=\frac{L}{2}\times\begin{cases} d_i^2(\gamma_i+\gamma_{i+2}), j=i, \\ -d_{i+2}d_i\gamma_{i+2}, \quad j=i+2, \\ 0 \quad \text{其它}. \end{cases}$$

接下来，记

$$A=(a_{ij})_{0\le i,j\le N-2}; \ B=(b_{ij})_{0\le i,j\le N-2} \quad y_N(x)=\sum_{i=0}^{N-2}\hat{y}_i\psi_i(x), \hat{Y}=(\hat{y}_0,\hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_{N-2})^T,$$

$$\phi_N(x)=\sum_{i=0}^{N-2}\hat{\phi}_i\psi_i(x), \ \hat{\phi}=(\hat{\phi}_0,\hat{\phi}_1,\cdots,\hat{\phi}_{N-2}), \ P=(p_0,p_1,\cdots,p_{N-2})^T, p_i=(p,\psi_i).$$

然后在(3.41)中，分别令 $\eta_N=\psi_j(x), \varphi_N=\psi_j(x)$ ($j=0,1,\cdots,N-2$)，则方程(3.41)可以写成如下矩阵形式

$$\begin{cases} A\hat{\phi} + B\hat{\phi} + C_2(d_0L)^2\hat{Y}_0 = P, \\ A\hat{Y} - B\hat{\phi} = 0. \end{cases}$$

其中 $\hat{Y}_0 = (\hat{y}_0, 0, \cdots, 0)$. 采用[21,22]中的迭代算法进行求解

即找 $(\phi_N^{i+1}, y_N^{i+1}) \in X_N^0$ 使得

$$\begin{cases} C_1\left((\phi_N^{i+1})', \varphi'_N\right) + (\phi_N^{i+1}, \varphi_N) + C_2(\xi_i, \varphi_N) = (p, \varphi_N), & \forall \varphi_N \in X_N^0, \\ \left((y_N^{i+1})', \eta'_N\right) - (\phi_N^{i+1}, \eta_N) = 0, & \forall \eta_N \in X_N^0. \end{cases} \tag{3.42}$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \omega\left(\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx - \xi_i\right). \tag{3.43}$$

这里取 $\xi_0 = 0$，$\omega > 0$ 是一个适当的迭代参数.

3.3.2 迭代的收敛性

定理 **3.6** 存在一个 ω 使得由(3.42)产生的序列收敛到(3.41)的解 (ϕ_N, y_N).

证明 用归纳法证明, 即证当 $k = 1,2,3,\cdots$ 时, 下式成立

$$\int_0^L y_N^k(x)dx \le \xi_{k-1} \le 0.$$

由于 $p(x) \le 0$，因此由离散极大值原理(DMP)[30], 当 $k = 1$，由(3.42)可得 $\phi_N^1(x) \le 0$，因此在区间 $[0, L]$ 上有 $y_N^1(x) \le 0$，从而

$$\int_0^L y_N^1(x)dx \le 0 = \xi_0.$$

假设当 $k = i$ 时成立

$$\int_0^L y_N^i(x)dx \le \xi_{i-1} \le 0. \tag{3.44}$$

此时由(3.43)可知

$$\xi_i \le \xi_{i-1} \le 0. \tag{3.45}$$

下证当 $k = i+1$ 时也是成立的. 令 $\zeta = \phi_N^i - \phi_N^{i+1}$，$\nu = y_N^i - y_N^{i+1}$，则由(3.42)可得

$$C_1(\zeta' - \varphi'_N) + (\zeta, \varphi_N) = C_2(\xi_i - \xi_{i-1}, \varphi_N), \qquad \forall \varphi_N \in X_N^0. \tag{3.46}$$

$$(\nu',\eta'_N)-(\zeta,\eta'_N)=0, \qquad \forall \eta_N \in X_N^0. \tag{3.47}$$

由(3.45)和离散极大值定理(DMP)可知$\zeta \le 0$, $\nu \le 0$, 即在区间$[0,L]$成立:

$$\phi_N^i \le \phi_N^{i+1}, \; y_N^i \le y_N^{i+1}.$$

由 Schwartz 不等式和 Poincare 不等式可得

$$\left|\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx-\int_0^L y_N^i(x)dx\right| \le \frac{L}{2}L^{\frac{3}{2}}\|(y_N^i(x)-y_N^{i+1}(x))'\|. \tag{3.48}$$

在(3.47)中, 令$\eta_N = y_N^i - y_N^{i+1}$, 由 Schwartz 不等式可得

$$\|(y_N^{i+1}-y_N^i)'\| \le \frac{L}{2}\|\phi_N^{i+1}-\phi_N^i\|. \tag{3.49}$$

在(3.46)中,令$\varphi_N=\phi_N^i-\phi_N^{i+1}$, 由(3.42)及 Schwartz 不等式可知

$$C_1\|(\phi_N^i-\phi_N^{i+1})'\|^2+\|\phi_N^i-\phi_N^{i+1}\|^2 \le C_2L^{\frac{1}{2}}|\xi_i-\xi_{i-1}|\|\phi_N^i-\phi_N^{i+1}\|.$$

即

$$\|\phi_N^i-\phi_N^{i+1}\| \le C_2L^{\frac{1}{2}}\omega/(C_1\frac{4}{L^2}+1)\left|\int_0^L y_N^i(x)dx-\xi_{i-1}\right|. \tag{3.50}$$

由(3.44), (3.48), (3.49), (3.50)可得

$$\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx-\int_0^L y_N^i(x)dx \le \frac{1}{4}C_2L^3\omega/(C_1\frac{4}{L^2}+1)[\xi_{i-1}-\int_0^L y_N^i(x)dx],$$

$$\xi_{i-1}-\xi_i=\omega[\xi_{i-1}-\int_0^L y_N^i(x)dx].$$

将上面两式相加可得

$$\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx-\int_0^L y_N^i(x)dx+\xi_{i-1}-\xi_i \le \omega[\frac{1}{4}C_2L^3/(C_1\frac{4}{L^2}+1)[\xi_{i-1}-\int_0^L y_N^i(x)dx].$$

整理可得

$$\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx-\xi_i \le [1-\omega(\frac{1}{4}C_2L^3/(C_1\frac{4}{L^2}+1)+1)][\int_0^L y_N^i(x)dx-\xi_{i-1}]. \tag{3.51}$$

由假设知 $\int_0^L y_N^i(x)dx-\xi_{i-1} \le 0$, 由(3.51)可知只需$\omega(\frac{1}{4}C_2L^3/(C_1\frac{4}{L^2}+1)+1) \le 1$,

当$0 \le \omega \le (\frac{1}{4}C_2L^3/(C_1\frac{4}{L^2}+1)+1)$时, 可得

$$\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx \le \xi_i.$$

即该迭代序列当$k=i+1$时成立.

又$y_N^i \le y_N^{i+1} \le 0$，所以序列$\{\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx\}$是单调有界的，从而收敛.

由(3.42)，(3.50)和离散极大值定理可知，序列$\{\phi_N^i\}$也是单调有界的且收敛. 通知可知序列$\{\xi_i\}$也是收敛的.

由(3.43)两边取极限可得

$$\lim_{i\to\infty}\xi_{i+1}=\lim_{i\to\infty}\xi_i+\lim_{i\to\infty}\omega(\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx-\xi_i).$$

$$\lim_{i\to\infty}(\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx-\xi_i)=0.$$

即是

$$\lim_{i\to\infty}\xi_i=\lim_{i\to\infty}\int_0^L y_N^{i+1}(x)dx.$$

注：定理 3.6 只是说明ω的存在性使得迭代格式收敛. 从证明过程中可知ω的取值不是唯一的，即$0\le\omega\le(\frac{1}{4}C_2L^3/(C_1\frac{4}{L^2}+1)+1)$. 对于$\omega\ge1$的情形，本文不作详细讨论，在计算实施的过程中，经计算知当$\omega\ge1$时迭代也存在收敛的情况，恰当的ω取值可以加快迭代的收敛速度.

3.3.3 误差估计

首先定义从$H_0^1(\Lambda)$到X_N^0的两个投影算子$\tilde{\pi}_N^{1,0}$及$\pi_N^{1,0}$如下：对任意的$y,\phi\in H_0^1(\Lambda)$

$$\begin{cases}((y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)',\eta'_N)=0, & \forall\eta_N\in X_N^0,\\ C_1((\phi-\pi_N^{1,0}\phi)',\varphi'_N)+(\phi-\pi_N^{1,0}\phi,\varphi_N)=0, & \forall\varphi_N\in X_N^0.\end{cases}\tag{3.52}$$

其次，为了方便表达误差估计式，定义 Sobolev 空间$H^m(\Lambda)$如下形式的半范数

$$|v|_{H^{m;N}(\Lambda)}=\left(\sum_{k=\min(m,N+1)}^{m}\|\partial_x^k v\|_{L^2(\Lambda)}^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \forall v\in H^m(\Lambda).$$

当$y,\phi\in H^m(\Lambda)\cap H_0^1(\Lambda)$时，由[18]知如下的误差估计式成立

$$\begin{cases}\| y-\tilde{\pi}_N^{1,0} y\|_{H^k(\Lambda)}\le CN^{k-m}\,|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}, & m\ge 1, k=0,1;\\ \|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|_{H^k(\Lambda)}\le CN^{k-m}\,|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}, & m\ge 1, k=0,1.\end{cases}\tag{3.53}$$

引理 3.6 若 $(\phi, y),(\phi_N, y_N)$ 分别是(3.2), (3.41)的解，$\tilde{\pi}_N^{1,0}y$ 和 $\pi_N^{1,0}\phi\in X_N^0$ 分别是 y 和 ϕ 的投影，则可得

$$\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\le\frac{L}{2}\|\phi-\phi_N\|,\tag{3.54}$$

$$\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|\le\frac{C_2L}{1+C_1(\frac{2}{L})^2}\|y-y_N\|,\tag{3.55}$$

$$\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\|\le\frac{C_2L^2}{2C_1}\|y-y_N\|.\tag{3.56}$$

证明 由(3.2)减去(3.41)可得

$$\begin{cases}C_1((\phi-\phi_N)',\varphi'_N)+(\phi-\phi_N,\varphi_N)+C_2\int_0^L y(x)-y_N(x)dx\int_0^L\varphi_N(x)dx=0, \forall\,\varphi_N\in X_N^0,\\ ((y-y_N)',\eta'_N)+(\phi-\phi_N,\eta_N)=0, \qquad \forall\,\varphi_N\in X_N^0.\end{cases}\tag{3.57}$$

由(3.52)的第一式和(3.57)的第二式可得

$$((\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)',\eta'_N)=((y-y_N)',\eta'_N)+((\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y)',\eta'_N)=(\phi-\phi_N,\eta_N).$$

令 $\eta_N=\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N$，由 Poincare 不等式可得

$$\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|^2\le\|\phi-\phi_N\|\cdot\|\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N\|\le\frac{L}{2}\|\phi-\phi_N\|\cdot\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|.$$

由此知(3.54)成立.

接下来，由(3.52)的第二式和(3.57)的第一式可得

$$C_1((\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)',\varphi'_N)+(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N,\varphi_N)=C_1((\phi-\phi_N)',\varphi'_N)+(\phi-\phi_N,\varphi_N)\tag{3.58}$$

$$=-C_2\int_0^L(y(x)-y_N(x))dx\int_0^L\varphi_N(x)dx.$$

令 $\varphi_N=\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N$，由引理 3.6 和 Schwartz 不等式可得

$$C_1(\frac{2}{L})^2\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|^2+\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|^2\le C_1\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\|^2+\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|^2$$

$$\le C_1\|y-y_N\|\cdot\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|.$$

因此

$$(1+C_1(\frac{2}{L})^2)\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|^2\le C_2L\|y-y_N\|.$$

即(3.55)成立.

最后，同样令$\varphi_N=\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N$，由 Poincare 不等式及(3.58)可得

$$C_1\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\|^2\le C_2L\|y-y_N\|\cdot\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|\le\frac{C_2L^2}{2}\|y-y_N\|\cdot\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\|.$$

即(3.56)成立.

定理 3.7 若$(\phi,y),(\phi_N,y_N)$分别是(3.2), (3.41)的解，且$\frac{C_2L^2}{4(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}<1$，则有

$$\|y-y_N\|\le CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)},\tag{3.59}$$

$$\|(y-y_N)'\|\le CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)},\tag{3.60}$$

$$\|\phi-\phi_N\|\le CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)},\tag{3.61}$$

$$\|(\phi-\phi_N)'\|\le CN^{-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{1-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}.\tag{3.62}$$

证明 由(3.54), 引理 3.6 和三角等式可得

$$\begin{aligned}\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|^2&\le\frac{L}{2}\|\phi-\phi_N\|\le\frac{L}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{L}{2}\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|\\&\le\frac{L}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{C_2L}{2(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}\|y-y_N\|\\&\le\frac{L}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{C_2L}{2(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}(\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|+\|\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N\|)\end{aligned}$$

$$\le\frac{L}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{C_2L}{2(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|+\frac{C_2L^2}{4(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|.$$

整理得

$$\left(1-\frac{C_2L^2}{4(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}\right)\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\le\frac{L}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{C_2L}{2(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|.$$

因此，$\frac{C_2L^2}{4(1+C_1(\frac{2}{L})^2)}<1$ 时，有

$$\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\le C(\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|).$$

结合上式及(3.53)可得

$$\begin{aligned}\|(y-y_N)'\|&\le\|(y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)'\|+\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\\&\le C(\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|)+\|(y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)'\|\\&\le CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}.\end{aligned}$$

即(3.60)成立. 接着，利用(3.53)及 Poincare 不等式可得

$$\begin{aligned}\|y-y_N\|&\le\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|+\|\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N\|\le\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|+\frac{L}{2}\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\\&\le C(\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|)\le CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}.\end{aligned}$$

即(3.59)成立.

其次，由(3.59)及引理 3.6 可知

$$\|\phi-\phi_N\|\le\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|\le\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{C_2L}{1+C_1(\frac{2}{L})^2}\|y-y_N\|\ .$$

因此可得(3. 61). 最后，由(3.53), (3.56)以及(3.59)可得

$$\begin{aligned}\|(\phi-\phi_N)'\|&\le\|(\phi-\pi_N^{1,0}\phi)'\|+\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\|\le\|(\phi-\pi_N^{1,0}\phi)'\|+\frac{C_2L^2}{2C_1}\|y-y_N\|\\&\le CN^{-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{1-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}.\end{aligned}$$

3.3.4 数值结果

在方程(1.1)中选取参数 $C_1=C_2=L=1$，同时取方程的精确解如下

$$y(x)=5x-(6e^{x}-6e^{-x})/(e-e^{-1})+x^3$$

首先固定多项式阶数 $N=8$ 进行计算. 迭代计算至 $|\xi_{i+1}-\xi_i|\le10^{-6}$，图 3.3 给出的是迭代所需的次数与 ω 的关系. 由图可见(迭代格式在 $\omega=2.0$ 时不收敛)，

迭代次数在 $\omega=1$ 时最小. 这与文献的迭代结果(见图 3.4)是相似的,但是本文所用的节点数比文献[21]所用的节点数少.

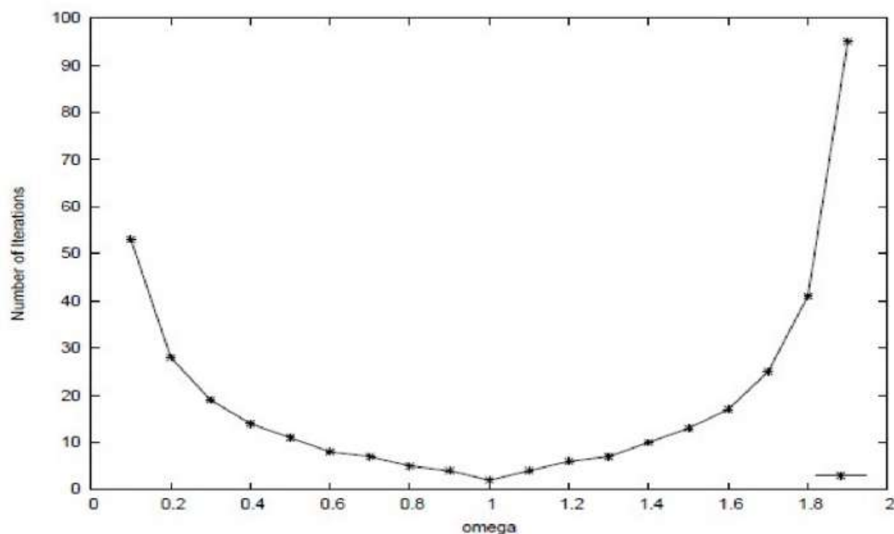


图 3.3: 迭代次数与 ω 的关系.

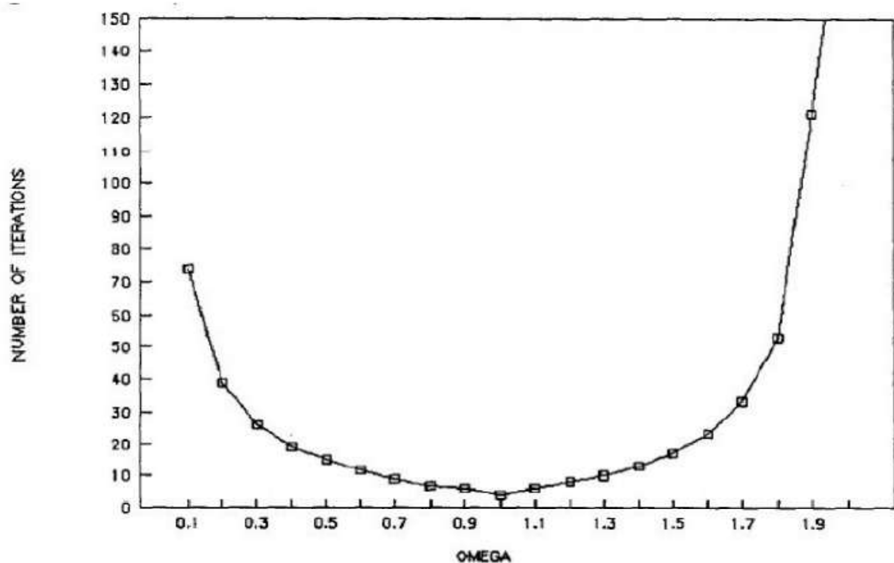


图 3.4 文献[21]中迭代次数与 ω 的关系,有限单元长度 $h=0.01$.

接下来考察谱逼近的收敛性. 为此,选取 $\omega=1.0$,并让迭代至 $|\xi_{i+1}-\xi_i|\le 10^{-15}$. 图 3.5(左)给出的是半 log 尺度下计算 $y(x)$ 和 $\phi(x)$ 所得到的

L^2-和 H^1-误差随 N 的变化情况. 由图可见误差关于 N 呈指数收敛, 这与理论分析的结果是相一致的.

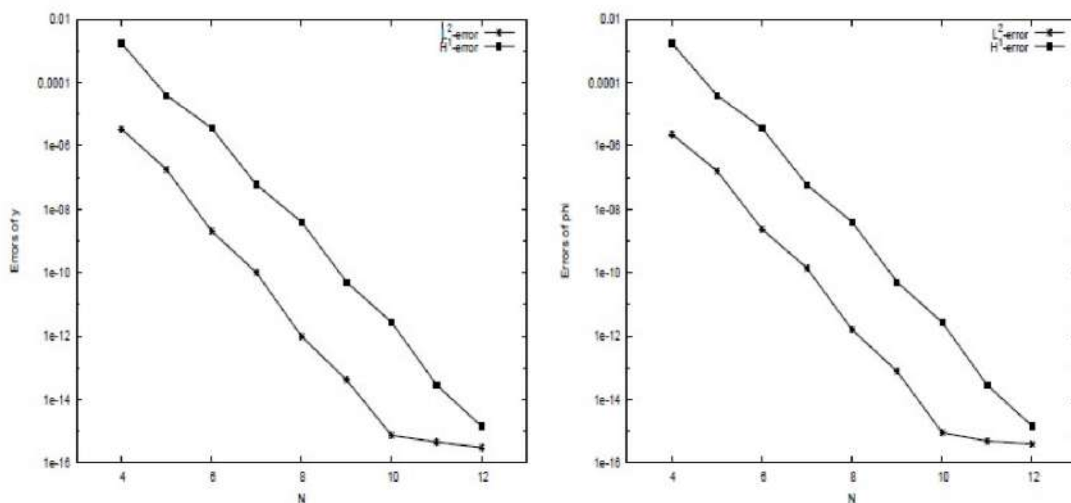


图 3.5:误差随 N 的变化情况: y (左)和 ϕ (右).

在实际应用中, 方程(1.1)的精确解一般是不知道的, 因此可以采用上述方法进行数值解算. 分别取 $p(x)=-x^2$ 及 $p(x)=-1$. 在上述算法中取 $\omega=1, N=40$ 进行计算, 迭代计算至 $|\xi_{i+1}-\xi_i|\le 10^{-15}$. 图 3.6 给出了当 $p(x)=-x^2$ 及 $p(x)=-1$ 时 $\phi(x), y(x)$ 的数值解, 所以当精确解未知时也可求得其数值结果, 这说明了方法在解决实际问题的适用性.

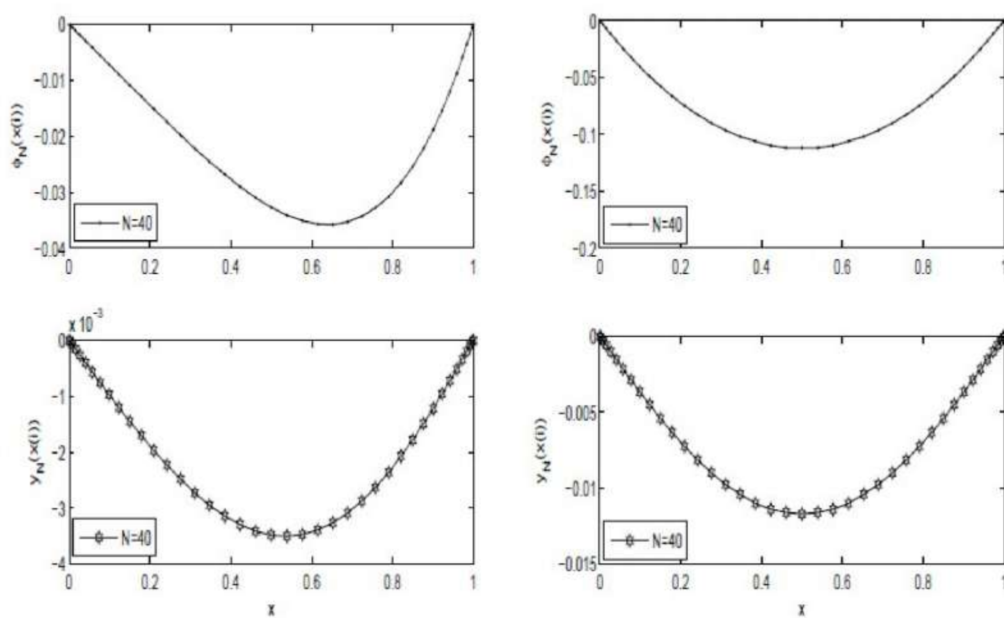


图 3.6: $N=40$, ϕ 和 y 的数值结果: $p(x)=-x^2$ (左), $p(x)=-1$ (右).

注:该部分已整理在《计算数学》,第35卷第2期发表.

第 4 章 铰链梁模型的数值解研究

本章针对铰链梁横向振动模型的数值解法进行探究，对该模型提出了紧差分格式，Legendre-Galerkin 谱逼近数值求解方案．同样，从模型精确解已知和未知的情况下进行讨论，数值结果说明了求解方案的实用性．

首先，在区间 $\Lambda=(0,\pi)$ 上考虑铰链梁模型．同样，令

$$\phi(x)=-y''(x).$$

则(1.2)可以写成如下形式

$$\begin{cases} -\phi''+\varepsilon\phi+\dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2dx\right)\phi=p(x), & x\in\Lambda, \\ \phi(0)=\phi(\pi)=0, & \\ -y''-\phi=0, & x\in\Lambda, \\ y(0)=y(\pi)=0. & \end{cases} \tag{4.1}$$

则其弱形式可写为：找 $(\phi,y)\in H_0^1(\Lambda)\times H_0^1(\Lambda)$，使得

$$\begin{cases} (\phi',\varphi')+\varepsilon(\phi,\varphi)+\dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2dx\right)(\phi,\varphi)=(p,\varphi), & \forall\varphi\in H_0^1(\Lambda), \\ \phi(0)=\phi(\pi)=0, & \\ (y',\eta')-(\phi,\eta)=0, & \forall\eta\in H_0^1(\Lambda), \\ y(0)=y(\pi)=0. & \end{cases} \tag{4.2}$$

4.1 紧差分格式逼近

这部分对由铰链梁横向振动模型，提出紧差分格式进行求解．采用 Newton 型迭代方法处理积分项，给出了差分格式解的存在性，收敛性和稳定性的证明．数值结果表明格式的精度为 $O(h^4)$．

4.1.1 古典解的先验估计

首先，仿照[36]令 $\xi=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi (y')^2dx$，则式(4.1)可写为

$$\begin{cases} -\phi''+(\varepsilon+\xi)\phi=p(x), & x\in\Lambda, \\ \phi(0)=\phi(\pi)=0, \\ -y''-\phi=0, & x\in\Lambda, \\ y(0)=y(\pi)=0. \end{cases} \tag{4.3}$$

将ξ作为一个参数，则式(4.3)的解可表示为$\phi=\phi(x,\xi), y=y(x,\xi)$．再令

$$g(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (y(x,\xi)')^2dx.$$

则通过求解方程$g(\xi)=\xi$就可得原方程的解. 由[28]知，ξ可看作区间$[0,\frac{\pi\|p\|}{2(\varepsilon+\frac{4}{\pi^2})}]$内的一个正数. 为了给出式(4.3)古典解的先验估计，假设所考虑的微分方程定解问题具有所需阶数的光滑解.

引理 4. 1 若$u(x)\in H_0^1(\Lambda)$，则有$\|u\|_\infty\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}|u|_1$，$\|u\|\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}|u|_1$.

定理 4. 1 设$\phi(x), y(x)$是式(4.3)的解，则

$$|\phi|_1\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|p\|, \tag{4.4}$$

$$\|\phi\|\le\frac{\|p\|}{\frac{6}{\pi^2}+\varepsilon+\xi}, \tag{4.5}$$

$$\|\phi\|_\infty\le\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\|p\|_\infty, \tag{4.6}$$

$$|y|_1\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\|p\|}{\frac{6}{\pi^2}+\varepsilon+\xi}, \tag{4.7}$$

$$\|y\|\le\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\|p\|}{\frac{6}{\pi^2}+\varepsilon+\xi}, \tag{4.8}$$

$$\|y\|_\infty\le\frac{\pi^4}{24}\|p\|_\infty. \tag{4.9}$$

证明 首先，由式(4.3)可得

$$-\int_0^\pi\phi''\phi dx+\int_0^\pi(\varepsilon+\xi)\phi^2dx=\int_0^\pi p(x)\phi(x)dx.$$

因此有

$$|\phi|_1^2+(\varepsilon+\xi)\|\phi\|^2\le\|p\|\cdot\|\phi\|.$$

由引理 4.1 可得

$$|\phi|_1\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|p\|.$$

即式(4.4)成立. 再次利用引理 4. 1，有

$$(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\|\phi\|)^2+(\varepsilon+\xi)\|\phi\|^2\le\|p\|\cdot\|\phi\|.$$

由此可得式(4. 5).

其次，由于$\|p\|\le\sqrt{\pi}\|p\|_\infty$，从而有

$$\|\phi\|_\infty\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}|\phi|_1\le\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\|p\|_\infty.$$

因此式(4.6)成立. 式(4.7), (4.8), (4.9)可类似证明.

4. 1. 2 紧差分格式

利用泰勒公式的积分余项公式可得如下引理.

引理 4. 2 如果$g(x)\in C^6[c-h,c+h]$，则有

$$\frac{1}{12}[g''(c-h)+10g''(c)+g''(c+h)]=\frac{1}{h^2}[g(c+h)-2g(c)+g(c-h)]$$

$$+\frac{h^4}{240}g^{(6)}(\eta),\eta\in(c-h,c+h).$$

为了建立方程(4.3)的紧差分格式. 首先, 将区间$[0,\pi]$作 m 等分, 记 $h=\frac{\pi}{m}$, $x_i=ih$, $0\le i\le m$. $\Omega_h=\{x_i|0\le i\le m\}$, 称定义在$\Omega_h$上的函数为网格函数. 并记$\delta_x^2u_i=\frac{1}{h^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})$. 设$\omega=\{\omega_i|0\le i\le m\}$，定义算子 $\mathcal{A}$ 如下

$$(\mathcal{A}\omega)_i=\begin{cases}\frac{1}{12}(\omega_{i-1}+10\omega_i+\omega_{i+1}),\ 1\le i\le m-1,\\ \omega_i,\ \ i=0,m.\end{cases}$$

在 x_i 处考虑方程(4.3)，则有

$$\begin{cases}-\phi''(x_i)+(\varepsilon+\xi)\phi(x_i)=p(x_i),\ 1<i<m-1,\\ \phi(0)=\phi(\pi)=0,\\ -y''(x_i)-\phi(x_i)=0, \qquad\qquad 1<x<m-1,\\ y(0)=y(\pi)=0.\end{cases}$$

用算子 $\mathcal{A}$ 作用于上式可得

$$\begin{cases}-\mathcal{A}\phi''(x_i)+(\varepsilon+\xi)\phi(x_i)=p(x_i),\ 1<i<m-1,\\ \phi(0)=\phi(\pi)=0,\\ -y''(x_i)-\phi(x_i)=0, \qquad\qquad 1<i<m-1,\\ y(0)=y(\pi)=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\mathcal{A}\varphi''(x_i)+(\varepsilon+\xi)\mathcal{A}\varphi(x_i)=\mathcal{A}p(x_i),\ \ 1\le i\le m-1,\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0,\\ -\mathcal{A}y''(x_i)=-\mathcal{A}\varphi(x_i),\ \ 1\le i\le m-1,\\ y(0)=y(\pi)=0.\end{cases}\tag{4.10}$$

由引理 4.2 可得

$$\begin{cases}\mathcal{A}\varphi''(x_i)=\delta_x^2\varphi(x_i)+\frac{h^4}{240}\frac{\partial^6\varphi}{\partial x^6}(\xi_i),\xi_i\in(x_{i-1},x_{i+1}),\\ \mathcal{A}y''(x_i)=\delta_x^2y(x_i)+\frac{h^4\partial^6 y}{240\partial x^6}(\eta_i),\eta_i\in(x_{i-1},x_{i+1}).\end{cases}$$

分别记 $R_i=\frac{h^4}{240}\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6}(\xi_i)$，$\widetilde{R}_i=\frac{h^4}{240}\frac{\partial^6 y}{\partial x^6}(\eta_i)$．将上式代入(4. 10)，并用 ϕ_i, y_i 分别

代替 $\phi(x_i), y(x_i)$，忽略小量项 $O(h^4)$，可得如下差分格式

$$\begin{cases} -\delta_x^2\varphi_i + \dfrac{(\varepsilon+\xi)}{12}(\varphi_{i+1}+10\varphi_i+\varphi_{i-1}) = \dfrac{(p_{i+1}+10p_i+p_{i-1})}{12},\ 1\le i\le m-1, \\ \varphi_0=\varphi_m=0, \\ -\delta_x^2 y_i = \dfrac{1}{12}(\varphi_{i+1}+10\varphi_i+\varphi_{i-1}),\ 1\le i\le m-1, \\ y_0=y_m=0. \end{cases} \tag{4. 11}$$

由上述过程知该差分格式的截断误差为$O(h^4)$.

定理 **4.2** 差分格式(4.11)是唯一可解的.

证明 考虑齐次方程组

$$\begin{cases} -\delta_x^2\varphi_i + \dfrac{(\varepsilon+\xi)}{12}[\varphi_{i+1}+10\varphi_i+\varphi_{i-1}] = 0,\ 1\le i\le m-1, \\ \varphi_0=\varphi_m=0. \end{cases} \tag{4.12}$$

令$\max\limits_{1\le i\le m-1}\{|\phi_i|\}=M$，现设$M>0$，则$\exists k\in[1,m-1]$使得$|\phi_k|=M$，且$|\phi_{k+1}|$和$|\phi_{k-1}|$中至少有一个小于$M$．则由

$$(2+10\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_k = (1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k-1} + (1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k+1}.$$

两边取绝对值可得

$$2M \le [2+10\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12}]|\phi_k| = \left|(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k-1} + (1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k+1}\right|$$

$$\le \left|(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k-1}\right| + \left|(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k+1}\right| < M+M=2M\ .$$

因此可得$M=0$，这与$M>0$相矛盾，所以方程组(4.12)只有零解.

另外，由于方程组

$$\begin{cases} -\delta_x^2 y_i = 0,\ 1\le i\le m-1, \\ y_0=y_m=0. \end{cases}$$

的系数矩阵是对称正定的，从而也只有零解. 因此差分格式对应的齐次方程组只有零解，所以差分格式(4.11)是唯一可解的.

下面讨论差分格式的收敛性. 令

$$U_0=\{u|u=\{u_i|1\le i\le m-1, u_0=u_m=0\}\text{为}\Omega_h\text{上的网格函数}\}.$$

记$\delta_x u_{i-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{h}(u_i-u_{i-1})$，并定义以下范数

$\|u\|_{\infty,h} = \max_{1\le i\le m-1}\|u_i\|$, $\|u\|_h = [h(\frac{1}{2}u_0^2 + \sum_{i=1}^{m-1}u_i^2 + \frac{1}{2}u_m^2)]^{\frac{1}{2}}$, $|u|_{1,h} = [h\sum_{i=1}^{m}(-\delta_x u_{i-\frac{1}{2}})^2]^{\frac{1}{2}}$.

引理 **4.3** 若 $u \in U_0$，则有

$$|u|_{1,h}^2 = h\sum_{i=1}^{m}(-\delta_x^2 u_i)u_i, \tag{4.13}$$

$$\|u\|_{\infty,h} \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}|u|_{1,h}, \tag{4.14}$$

$$\|u\|_h \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}|u|_{1,h}. \tag{4.15}$$

注：引理 4.3 的证明可参阅[4].

定理 **4.3** 设 $\phi = \{\phi_i | 0 \le i \le m\}, y = \{y_i | 0 \le i \le m\}$ 为差分格式(4. 11)的解. 则有

$$\|\phi\|_h \le \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{6}\|p\|_{\infty,h}, \tag{4.16}$$

$$|\phi|_{1,h} \le \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h}, \tag{4.17}$$

$$\|\phi\|_{\infty,h} \le \frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h}, \tag{4.18}$$

$$\|y\|_h \le \frac{\pi^{\frac{9}{2}}}{36}\|p\|_{\infty,h}, \tag{4.19}$$

$$|y|_{1,h} \le \frac{\pi^{\frac{7}{2}}}{12}\|p\|_{\infty,h}, \tag{4.20}$$

$$\|y\|_{\infty,h} \le \frac{\pi^4}{24}\|p\|_{\infty,h}. \tag{4.21}$$

证明 在式(4.11)中第一个方程两边同乘以 $h\phi_i$，并对 i 求和可得

$$h\sum_{i=1}^{m-1}(-\delta_x^2\phi_i)\phi_i + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{(\varepsilon+\xi)}{12}h(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1})\phi_i = \frac{h}{12}\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}+10p_i+p_{i-1})\phi_i.$$

因$\varepsilon,\xi>0$，故

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(\varepsilon+\xi)}{12}h(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1})\phi_i\geq\frac{(\varepsilon+\xi)}{12}h\sum_{i=1}^{m-2}[(\phi_i+\phi_{i+1})^2+8\phi_1^2+8\phi_{m-1}^2]\geq 0.$$

而由 Schwarz 不等式可得

$$\frac{1}{12}h\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}+10p_i+p_{i-1})\phi_i\leq\sqrt{h\sum_{i=1}^{m-1}p_i^2}\cdot\sqrt{h\sum_{i=1}^{m-1}\phi_i^2}=\|p\|_h\cdot\|\phi\|_h.$$

因此由式(4. 13)可得

$$|\phi|_{1,h}^2\leq\|p\|_h\cdot\|\phi\|_h.$$

$$\|p\|_h=\sqrt{h\sum_{i=1}^{m-1}p_i^2}\leq\|p\|_{\infty,h}\sqrt{\sum_{i=1}^{m-1}h}\leq\sqrt{\pi}\|p\|_{\infty,h}. \tag{4.22}$$

由式(4.15), (4.22)可得

$$\|\phi\|_h\leq\frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{6}\|p\|_{\infty,h}.$$

即式(4.16)成立．利用(4.14), (4.15)，并结合式(4.22)可得

$$|\phi|_{1,h}\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|p\|_h\leq\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h}.$$

$$\|\phi\|_{\infty,h}\leq\frac{\sqrt{\pi}}{2}|\phi|_{1,h}\leq\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\pi}\|p\|_{\infty,h}=\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h}.$$

即式(4.17), (4.18)成立.

同理，在$-\delta_x^2y_i=\mathcal{A}(\phi_i)$两边同乘以$hy_i$，并对$i$求和得

$$h\sum_{i=1}^{m-1}(-\delta_x^2y_i)y_i=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{h}{12}(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1})y_i.$$

同样，由式(4.13)与 Schwartz 不等式可知

$$|y|_{1,h}^2\leq\|y\|_h\cdot\|\phi\|_h.$$

由式(4.15), (4.16)可得

$$|y|_{1,h}^2\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|\phi\|_h\cdot|y|_{1,h}.$$

$$|y|_{1,h} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|\phi\|_h \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\pi}\|\phi\|_{\infty,h} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\pi}\,\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h} = \frac{\pi^{\frac{7}{2}}}{12}\|p\|_{\infty,h}.$$

式(4.20)得证. 利用(4.14), (4.15), (4.18)得

$$\|y\|_h \le \frac{\pi^{\frac{9}{2}}}{36}\|p\|_{\infty,h}.$$

$$\|y\|_{\infty,h} \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}|y|_{1,h} \le \frac{\pi^4}{24}\|p\|_{\infty,h}.$$

从而式(4.19), (4.21)得证.

定理 **4.4** 设 $y(x_i)$ 为边值问题(4.10)的解, y_i 为差分格式(4.11)的解. 记 $e_i = \phi(x_i) - \phi_i$, $\widetilde{e}_i = y(x_i) - y_i, 0 \le i \le m$, 则有

$$\|e\|_{\infty,h} \le \frac{\pi^2}{480\sqrt{6}}M_1 h^4, \quad \|\tilde{e}\|_{\infty,h} \le \frac{\pi^2}{480\sqrt{6}}M_2 h^4.$$

其中 $M_1 = \max\limits_{0\le x\le\pi}\left|\phi^{(6)}(x)\right|, M_2 = \max\limits_{0\le x\le\pi}\left|y^{(6)}(x)\right|$.

证明 将方程(4.10)与差分格式(4.11)相减可得误差方程

$$\begin{cases} -\delta_x^2 e_i + (\varepsilon+\xi)\mathcal{A}e_i = R_i, & 1\le i\le m-1, \\ e_0 = e_m = 0, \\ -\delta_x^2 \tilde{e}_i = \tilde{R}_i, & 1\le i\le m-1, \\ \tilde{e}_0 = \tilde{e}_m = 0. \end{cases}$$

由定理 4.3 可得

$$\|e\|_{\infty,h} \le \frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\max_{1\le i\le m-1}|R_i| \le \frac{\pi^2}{480\sqrt{6}}M_1 h^4.$$

$$\|\widetilde{e}\|_{\infty,h} \le \frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\max_{1\le i\le m-1}\left|\widetilde{R}_i\right| \le \frac{\pi^2}{480\sqrt{6}}M_2 h^4.$$

从而可知差分格式在范数 $\|\cdot\|_{\infty,h}$ 下是 4 阶收敛的.

定理 **4.5** 差分格式(4.11)是稳定的.

证明 假设在计算 $\mathcal{A}p(x_i)$，$-\mathcal{A}\phi(x_i)$ 时分别有微小的误差 $g_i,\widetilde{g}_i$，设 η_i,v_i 是下列问题的解，即

$$\begin{cases}-\delta_x^2\eta_i+(\varepsilon+\xi)\mathcal{A}\eta_i=\mathcal{A}p(x_i)+g_i,\ \ 1\le i\le m-1,\\ \eta_0=\eta_m=0,\\ -\delta_x^2 v_i=-\mathcal{A}\phi_i+\tilde{g}_i,\ \ 1\le i\le m-1,\\ v_0=v_m=0.\end{cases}\tag{4.23}$$

将方程(4.10)和(4.23)相减可得

$$\begin{cases}-\delta_x^2\lambda_i+\mathcal{A}(\varepsilon+\xi)\lambda_i=g_i,\ \ 1\le i\le m-1,\\ \lambda_0=\lambda_m=0,\\ -\delta_x^2\tilde{\lambda}_i=\tilde{g}_i,\ \ 1\le i\le m-1,\\ \tilde{\lambda}_0=\tilde{\lambda}_m=0.\end{cases}$$

其中 $\lambda_i=\eta_i-\phi_i,\widetilde{\lambda}_i=v_i-y_i$.

由定理 4.3 可得

$$\|\lambda\|_{\infty,h}\le\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\max_{1\le i\le m-1}|g_i|,$$

$$\|\widetilde{\lambda}\|_{\infty,h}\le\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\max_{1\le i\le m-1}|\widetilde{g}_i|.$$

当 $\max\limits_{1\le i\le m-1}|g_i|$，$\max\limits_{1\le i\le m-1}|\tilde{g}_i|$ 很小时，$|\lambda|,|\widetilde{\lambda}|$ 也很小．所以差分格式(4.11)是稳定的.

4.1.3 方程的求解

如前所述，可以通过求解 $g(\xi)=\xi$ 来得到方程(4.3)的解，进而可求得原问题(1.2)的数值解．然而在多数情况下，方程 $g(\xi)=\xi$ 的古典解是难以求得的．因此，采用 Newton 迭代算法来求解 $f(\xi)=g(\xi)-\xi=0$．具体迭代求解过程有如下 4 个步骤:

(i) 给定初始值ξ_0，如$\xi_0 = 0$.

(ii) 已知$\xi_k (k = 0,1,2,...)$，依次求解下列方程，即

$$\begin{cases} -\delta_x^2 \phi_i + \dfrac{(\varepsilon + \xi_k)}{12}(\phi_{i+1} + 10\phi_i + \phi_{i-1}) = \dfrac{1}{12}(p_{i+1} + 10 p_i + p_{i-1}), 1 \le i \le m-1, \\ \phi_0 = \phi_m = 0, \\ -\delta_x^2 y_i = \dfrac{1}{12}(\phi_{i+1} + 10\phi_i + \phi_{i-1}), \qquad 1 \le i \le m-1, \\ y_0 = y_m = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

(iii) 根据格式

$$\xi_{k+1} = \xi_k - \frac{f(\xi_k)}{f'(\xi_k)}, \qquad k = 0,1,2,...; \ \ \xi_0 \ge 0.$$

来计算ξ_{k+1}，其中$f(\xi_k), f'(\xi_k)$可分别采用如下数值算法. 由分部积分可知

$$g(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y(x,\xi)\phi(x,\xi)dx.$$

因此$f(\xi)$可利用数值积分来逼近

$$f(\xi_k) = g(\xi_k) - \xi_k \approx \frac{2}{\pi} h \sum_{i=1}^{m-1} y_k(x_i)\phi_k(x_i) - \xi_k.$$

$f'(\xi_k)$可采用差商的形式(3. 16), (3. 17)进行替代.

(iv) 若$\left|\xi_k - \xi_{k+1}\right| < TOL$($TOL$为迭代控制精度)，迭代终止，否则令$\xi_k = \xi_{k+1}$，转 2).

4. 1. 4 数值结果

为便于表达和计算，在式(1.1)中选取参数$\varepsilon = 2$，并采用(3.34)式进行计算.

例 **4.1** $p(x) = -4\sin x$，此时方程的精确解为$y(x) = -\sin x$.

表 4. 1 给出了取 TOL$=10^{-10}$，数值解和精确解最大误差的绝对值以及不同节点处数值解的最大误差. 其中

$$E_{\infty}(h)=\max_{1\le i\le m-1}\left|y(x_i)-y_i\right|.$$

由表可以看出数值解在范数$\|\cdot\|_{\infty,h}$下具有 4 阶精度. 且随着步长的减小，迭代所需的次数随着减小.

表 4.1 部分节点处数值解误差的绝对值和数值解的最大误差.

h	k	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$E_{\infty}(h)$	$E_{\infty}(h)/E_{\infty}(h/2)$
$\frac{\pi}{10}$	9	1.2591e-05	2.3950e-05	3.8752e-05	2.3950e-05	4.0746e-05	*
$\frac{\pi}{20}$	7	7.8464e-07	1.4924e-06	2.4149e-06	1.4924e-06	2.5391e-06	16.0471
$\frac{\pi}{40}$	7	4.9005e-08	9.3214e-08	1.5082e-07	9.3214e-08	1.5858e-07	16.0113
$\frac{\pi}{80}$	7	3.0623e-09	5.8249e-09	9.4249e-09	5.8249e-09	9.9099e-09	16.0027
$\frac{\pi}{160}$	6	1.8779e-10	3.5720e-10	5.7796e-10	3.5719e-10	6.07771e-10	16.3070

图 4.1(左)给出的是节点不同时的数值解的误差曲线；图 4.11(右)给出的是$m=10$是的数值解曲线和精确解曲线. 由图可见，当$m=10$时，数值解和精确解的曲线已经很接近；且随着节点个数的增加数值解的误差趋向于

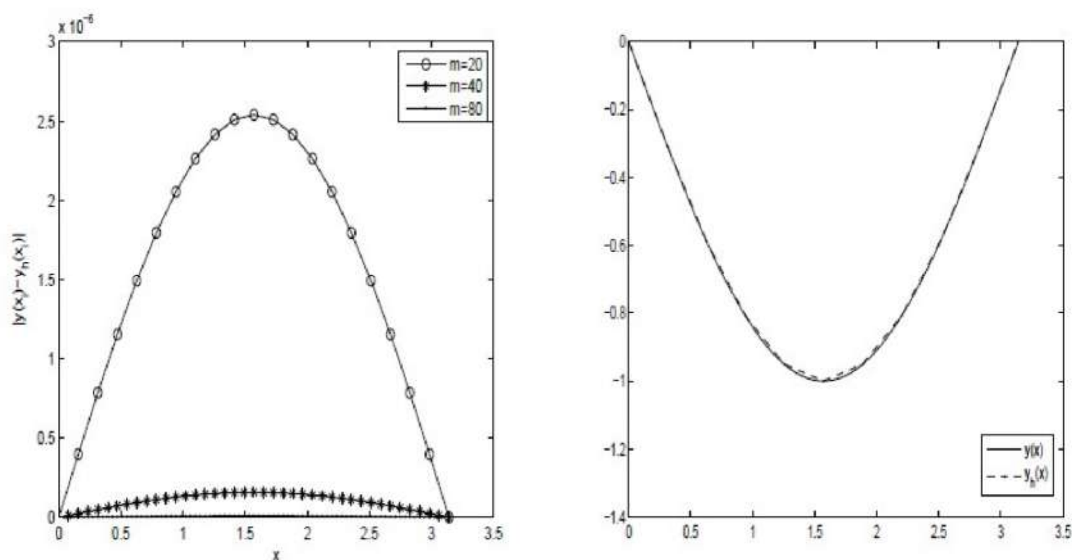


图 4.1 节点不同时的数值解的误差曲线(左)；$m=10$的数值解曲线和精确解曲线(右).

在实际应用中, 如当 $p(x)=-x^2,-1$ 时, 难以求得方程(1.2)的精确解, 利用上述求解方案可得 y,ϕ 的数值结果.

例 **4.2** 取 $p(x)=-x^2,-1$, 当 TOL=10^{-10} 迭代终止. 图(4.2)分别给出了利用 Newton 法 2 所得的 ϕ, y 的数值结果.

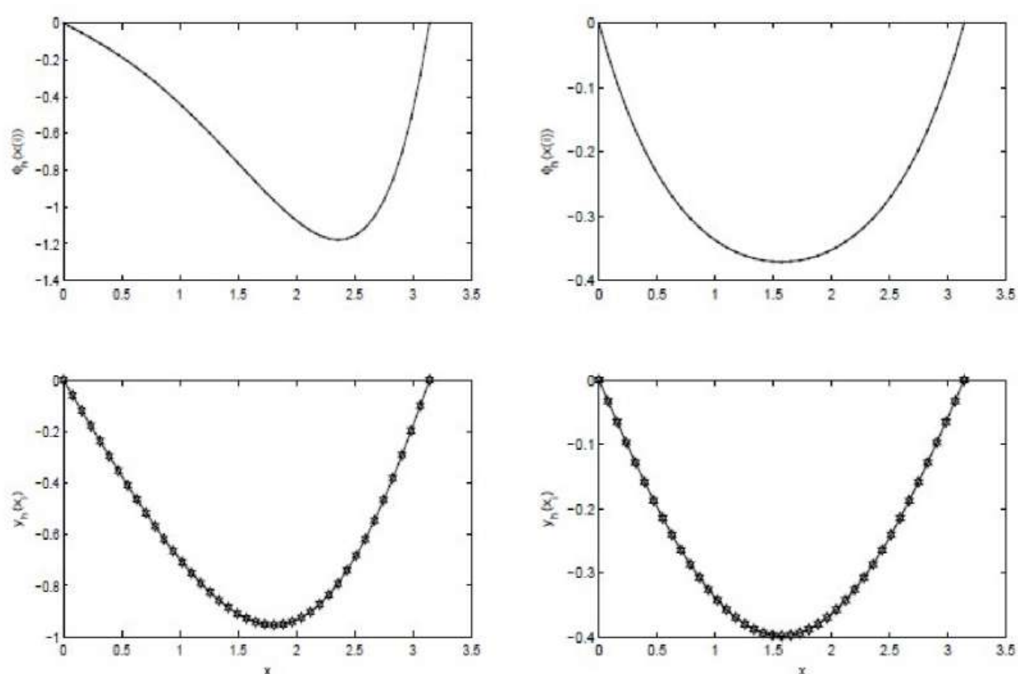


图 4.2: $p(x)$ 不同时所得 ϕ 和 y 的数值结果: $p(x)=-x^2$ (左), $p(x)=-1$ (右).

注:该部分已整理被华侨大学学报自然科学版录用.

4.2 Legendre-Galerkin 谱逼近

这部分对铰链梁横向振动模型而建立的四阶微积分方程提出 Legendre-Galerkin 谱逼近进行求解，给出了简单迭代算法的收敛性证明，对求解方案进行了误差分析．且通过数值算例说明算法的可行性和有效性.

4.2.1 Legendre-Galerkin 谱逼近的弱形式

在这一节给出 Legendre-Galerkin 谱逼近的弱形式和相应的离散系统．首先，令 $X_N = \mathrm{span}\{L_0(x), L_1(x), \cdots, L_N(x)\}$，$X_N^0 = X_N \cap H_0^1(\Lambda)$.

记 $L_i(x)$ 为 i 阶的 Legendre 多项式．则方程(4.2)的 Legendre-Galerkin 谱逼近形式为：找 $(\phi_N, y_N) \in X_N^0 \times X_N^0$ 使得

$$\begin{cases} -(\phi_N', \varphi_N') + (\phi_N, \varphi_N) + \dfrac{2}{\pi}\int_0^L (y_N')^2 dx(\phi_N, \varphi_N) = (p, \varphi_N), & \forall \varphi \in X_N^0, \\ \phi_N(0) = \phi_N(\pi) = 0, & \\ (y_N', \eta_N') - (\phi_N, \eta_N) = 0, & \forall \eta \in X_N^0, \\ y_N(0) = y_N(\pi) = 0. & \end{cases} \tag{4.25}$$

由于方程(4.25)最终所对应的线性系统取决于空间 X_N^0 的基函数的选取,为构建一个合适的基函数，利用 Legendre 多项式的正交性．首先利用线性变换

$$\hat{x} := \hat{x}(x) = \frac{2}{\pi}x - 1, \forall \ x \in \Lambda.$$

将区间 Λ 变换到参考区间 $\hat{\Lambda} = (-1,1)$．仿照[35,37]，对于 $j = 0,1,2,\cdots, N-2$，令

$$\psi_j(x) = c_j(L_j(\hat{x}) - L_{j+2}(\hat{x})), x \in \Lambda.$$

这里 $c_j = \dfrac{1}{\sqrt{4j+6}}$．则空间 X_N^0 可以表示为如下形式:

$$X_N^0 = \text{span}\{\psi_0(x), \psi_1(x), \cdots, \psi_{N-2}(x)\}.$$

下面推导方程(4.25)的矩阵形式. 为此，记

$$\gamma_k = \frac{2}{2k+1}, a_{ij} = (\psi_j^{'}, \psi_i^{'}), b_{ij} = (\psi_j, \psi_i).$$

由 Legendre 多项式的正交性可得

$$a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, j = i, \\ 0, j \neq i, \end{cases} \qquad b_{ij} = b_{ji} = \frac{\pi}{2} \times \begin{cases} d_i^2(\gamma_i + \gamma_{i+2}), j = i, \\ -d_{i+2} d_i \gamma_{i+2}, \quad j = i+2, \\ 0 \qquad \text{其它}. \end{cases}$$

接下来，记

$$A = (a_{ij})_{0 \le i, j \le N-2};\ B = (b_{ij})_{0 \le i, j \le N-2} \quad y_N(x) = \sum_{i=0}^{N-2} \hat{y}_i \psi_i(x), \hat{Y} = (\hat{y}_0, \hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_{N-2})^T,$$

$$\phi_N(x) = \sum_{i=0}^{N-2} \hat{\phi}_i \psi_i(x),\ \hat{\phi} = (\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \cdots, \hat{\phi}_{N-2}),\ P = (p_0, p_1, \cdots, p_{N-2})^T, p_i = (p, \psi_i).$$

然后在(4.25)中，分别令 $\eta_N = \psi_j(x), \varphi_N = \psi_j(x) \quad (j = 0, 1, \cdots, N-2)$，则方程可以写成如下矩阵形式

$$\begin{cases} A\hat{\Phi} + \varepsilon B\hat{\Phi} + \frac{4}{\pi^2}\hat{Y}^T\hat{Y}B\hat{\Phi} = \hat{P}, \\ A\hat{Y} - B\hat{\Phi} = 0. \end{cases}$$

在直接的求解过程中，由于积分项的存在将会得到一个非线性系统. 为解决这个问题，采用如下迭代方案 $\xi_0 = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \cdots$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \omega\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{(y_N^{i+1})'\right\}^2 dx - \xi_i\right). \tag{4.26}$$

其中 $\omega > 0$ 是一个适当的迭代参数.

即寻找 $(\phi_N^{i+1}, y_N^{i+1}) \in X_N^0$ 使得

$$\begin{cases} \left((\phi_N^{i+1})', \varphi'_N\right) + \varepsilon(\phi_N^{i+1}, \varphi_N) + \xi_i(\phi_N^{i+1}, \varphi_N) = (p, \varphi_N), & \forall \varphi_N \in X_N^0, \\ \left((y_N^{i+1})', \eta'_N\right) - (\phi_N^{i+1}, \eta_N) = 0, & \forall \eta_N \in X_N^0. \end{cases} \tag{4.27}$$

则可以利用上述求解方案，求得原方程的数值结果.

4.2.2 迭代的收敛性

如前所述，假设 $p(x)$ 是区间 $[0,\pi]$ 上的连续函数且 $p(x)\le 0$．由假设条件可知极值原理可在证明中适用.

引理 **4.4** 若 $0<\omega\le\dfrac{\varepsilon}{4\|(y_N^1)'\|\cdot\|\phi_N^1\|+\varepsilon}$ 则由(4.27)产生的序列 (ϕ_N^{i+1},y_N^{i+1}) 收敛到(4.25)的解 (ϕ_N,y_N).

证明 用数学归纳法证明，即证当 $i=0,1,2,3,\cdots$ 时，下式成立

$$0\le\xi_i\le\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left\{(y_N^{i+1})'\right\}^2dx\le\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left\{(y_N^1)'\right\}^2dx. \tag{4.28}$$

由于 $p(x)\le 0$，因此由离散极大值原理及(4.26)，当 $i=0$ 时可得

$$\phi_N^1(x)\le 0\,,\,y_N^1(x)\le 0,\quad \xi_0\le\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left\{(y_N^1)'\right\}^2dx.$$

假设当 $k=0,1,2,3,\cdots,i-1$ 时(4.28)成立，下面证明当 $k=i$ 时也成立

$$\phi_N^k(x)\le 0\,,\,y_N^k(x)\le 0.\qquad \xi_k\le\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left\{(y_N^{k+1})'\right\}^2dx\le\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left\{(y_N^1)'\right\}^2dx.$$

则由上述假设可得

$$0\le\xi_{i-1}\le\xi_i\quad.$$

和

$$\xi_i=\xi_{i-1}+\omega\left(\frac{2}{\pi}\int_0^L\left\{(y_N^i)'\right\}^2dx-\xi_{i-1}\right)\le\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left\{(y_N^1)'\right\}^2dx.$$

再次由极大值原理可 $\phi_N^{i+1}(x)\le 0\,,\,y_N^{i+1}(x)\le 0$.

由(4.27)可知

$$\left((\phi_N^i-\phi_N^{i+1})',\varphi'_N\right)+\varepsilon(\phi_N^i-\phi_N^{i+1},\varphi_N)+\xi_i(\phi_N^i-\phi_N^{i+1},\varphi_N)=(\xi_i-\xi_{i-1})(\phi_N^i,\varphi),\ \forall\varphi_N\in X_N^0. \tag{4.29}$$

$$\left((y_N^i-y_N^{i+1})',\eta'_N\right)-(\phi_N^i-\phi_N^{i+1},\eta_N)=0,\quad\forall\eta_N\in X_N^0. \tag{4.30}$$

因此，由极大值原理可得

$$\phi_N^i - \phi_N^{i+1} \le 0,\ \ y_N^i - y_N^{i+1} \le 0 .$$

由(4.25)可得

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{(y_N^{i+1})'\right\}^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y_N^{i+1}\phi_N^{i+1} dx \le \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y_N^i\phi_N^i dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{(y_N^i)'\right\}^2 dx \le \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{(y_N^1)'\right\}^2 dx .$$

由(4.27)可得

$$\|(y_N^i - y_N^{i+1})'\|^2 = (\phi_N^i - \phi_N^{i+1}, y_N^i - y_N^{i+1}) \le \|\phi_N^i - \phi_N^{i+1}\| \cdot \|y_N^i - y_N^{i+1}\| .$$

由(4.30)可得

$$\|y_N^i - y_N^{i+1}\|^2 = \int_0^\pi (y_N^i - y_N^{i+1})^2 dx \le \frac{\pi^2}{4}\|(y_N^i - y_N^{i+1})'\|^2 \le \pi^2 \|y_N^i - y_N^{i+1}\|^2 \le \pi^2 \|\phi_N^i - \phi_N^{i+1}\| \cdot \|y_N^i - y_N^{i+1}\| .$$

即

$$\|y_N^i - y_N^{i+1}\| \le \pi^2 \|\phi_N^i - \phi_N^{i+1}\| .$$

由(4. 29)可得

$$\|\phi_N^i - \phi_N^{i+1}\|^2 \le \frac{1}{\varepsilon}(\xi_i - \xi_{i-1})\|\phi_N^i\| \cdot \|\phi_N^i - \phi_N^{i+1}\| .$$

因此

$$\|\phi_N^i - \phi_N^{i+1}\| \le \frac{1}{\varepsilon}(\xi_i - \xi_{i-1})\|\phi_N^i\| \le \frac{1}{\varepsilon}(\xi_i - \xi_{i-1})\|\phi_N^1\| .$$

由ω的假设和上述结论可知

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(y_N^i)']^2 dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(y_N^{i+1})']^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(y_N^i)' + (y_N^{i+1})'][(y_N^i)' - (y_N^{i+1})'] dx$$

$$\le \frac{2}{\pi}\|(y_N^i)' + (y_N^{i+1})'\| \cdot \|(y_N^i)' - (y_N^{i+1})'\| \le \frac{4}{\pi}\|(y_N^1)'\| \pi \|\phi_N^i - \phi_N^{i+1}\|$$

$$\le 4\|(y_N^1)'\| \frac{1}{\varepsilon}(\xi_i - \xi_{i+1})\|\phi_N^1\| \le \frac{4}{\varepsilon}\|(y_N^1)'\| \cdot \|\phi_N^1\| \omega\left(\frac{2}{\pi}\int_0^L [(y_N^i)']^2 dx - \xi_{i-1}\right).$$

又可知

$$\xi_i - \xi_{i+1} = \omega\left(\frac{2}{\pi}\int_0^L \left\{(y_N^i)'\right\}^2 dx - \xi_{i-1}\right).$$

将上述两个不等式相加可得

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(y_N^i)']^2 dx \frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(y_N^{i+1})']^2 dx + \xi_i - \xi_{i+1} \le (\frac{4}{\varepsilon}\|(y_N^1)'\| \cdot \|\phi_N^1\| + 1)\omega(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(y_N^i)']^2 dx - \xi_{i-1}) \cdot$$

即

$$\xi_i - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{(y_N^{i+1})'\right\}^2 dx \le [(\frac{4}{\varepsilon}\|(y_N^1)'\|\cdot\|\phi_N^1\|+1)\omega-1]\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{L}\left\{(y_N^i)'\right\}^2 dx-\xi_{i-1}\right).$$

由于 $\frac{2}{\pi}\int_0^{L}\left\{(y_N^i)'\right\}^2 dx-\xi_{i-1}\ge 0$，这里仅使系数 $(\frac{4}{\varepsilon}\|(y_N^1)'\|\cdot\|\phi_N^1\|+1)\omega-1\le 0$ 即可.
也即是

$$\omega \le \frac{\varepsilon}{4\|(y_N^1)'\|\cdot\|\phi_N^1\|+\varepsilon}.$$

则下述不等式成立

$$\xi_i \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{(y_N^{i+1})'\right\}^2 dx.$$

即该迭代序列当 $k=i+1$ 时成立.
从而可知序列 $\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[(y_N^i)']^2 dx\}$ 也是单调有界的，则其极限存在. 同理可知序列 $\{\xi_i\}$ 是单调有界的，所以序列 $\{\xi_i\}$ 的极限也存在.
因此可得

$$\lim_{n\to\infty}\xi_{i+1}=\lim_{n\to\infty}\xi_i+\lim_{n\to\infty}\omega(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{(y_N^{i+1})'\right\}^2 dx-\xi_i).$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\xi_i=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[(y_N^i)']^2 dx.$$

证明完毕.

4.2.3 误差估计

在(4.25)中令 $\phi_N=\phi\in X_N^0$，由(4.2)减去(4.25)可得

$$\begin{cases}((\phi-\phi_N)',\varphi')+\varepsilon(\phi-\phi_N,\varphi)+\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}(y')^2dx\right)(\phi,\varphi)-\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}(y_N')^2dx\right)(\phi_N,\varphi)=0, & \forall\varphi\in X_N^0,\\ ((y-y_N)',\eta')-(\phi-\phi_N,\eta)=0, & \forall\eta\in X_N^0.\end{cases} \quad (4.31)$$

记 $\tilde{\pi}_N^{1,0}y$ 和 $\pi_N^{1,0}\phi$ 分别是 y 和 ϕ 的从 $H_0^1(\Lambda)$ 到 X_N^0 的两个投影算子，定义如下:

对任意的 $y,\phi\in H_0^1(\Lambda)$

$$\begin{cases}((y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)',\eta'_N)=0, & \forall\eta_N\in X_N^0,\\ ((\phi-\pi_N^{1,0}\phi)',\varphi'_N)+\varepsilon(\phi-\pi_N^{1,0}\phi,\varphi_N)+\dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi(y')^2dx\right)(\phi-\pi_N^{1,0}\phi,\varphi)=0, & \forall\varphi_N\in X_N^0.\end{cases}\tag{4.32}$$

其次, 为了方便表达误差估计式. 定义 Sobolev 空间 $H^m(\Lambda)$ 如下形式的半范数

$$|v|_{H^{m;N}(\Lambda)}=\left(\sum_{k=\min(m,N+1)}^{m}\|\partial_x^k v\|_{L^2(\Lambda)}^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \forall v\in H^m(\Lambda).$$

引理 **4.5** 若 $y,\phi\in H^m(\Lambda)\cap H_0^1(\Lambda)$,则

$$\|y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y\|_{H^k(\Lambda)}\le CN^{k-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)},\qquad m\ge1,k=0,1;\tag{4.33}$$

$$\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|_{H^k(\Lambda)}\le CN^{k-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)},\qquad m\ge1,k=0,1.$$

注: 该引理的证明过程可参考[18].

引理 **4.6** 若 $(\phi,y),(\phi_N,y_N)$ 分别是(4.2),(4.25)的解,则可得

$$\|y'\|\le\frac{\pi}{2}\|\phi\|,\|\phi\|\le\frac{1}{\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2}\|p\|,\tag{4.34}$$

$$\|y_N'\|\le\frac{\pi}{2}\|\phi_N\|,\|\phi_N\|\le\frac{1}{\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2}\|p\|.\tag{4.35}$$

证明 对于(4.34), 由(4.2)的第二式和 Poincare 不等式,当 $\eta=y$ 时可得

$$\|y'\|^2\le\|\phi\|\cdot\|y\|\le\frac{\pi}{2}\|\phi\|\cdot\|y'\|.$$

则

$$\|y'\|\le\frac{\pi}{2}\|\phi\|.$$

再由(4.2)的第一式,当 $\phi=\varphi$ 时可得

$$(\frac{2}{\pi})^2\|\phi\|^2+\varepsilon\|\phi\|^2\le\|\phi'\|^2+\varepsilon\|\phi\|^2+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(y')^2dx\|\phi\|^2\le(p,\phi)\le\|p\|\cdot\|\phi\|\cdot$$

可得

$$\|\phi\| \le \frac{1}{\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2}\|p\|.$$

即(4.34)得证，对于(4.35)可类似证明. 且由(4.34), (4.35)可得

$$\|y'\| \le \frac{\pi}{2(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)}\|p\|,\quad \|y_N'\| \le \frac{\pi}{2(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)}\|p\|. \tag{4.36}$$

引理 **4.7** 若 $(\phi, y), (\phi_N, y_N)$ 分别是(4.2), (4.25)的解, $\tilde{\pi}_N^{1,0}y$ 和 $\pi_N^{1,0}\phi \in X_N^0$ 分别是 y 和 ϕ 的由(4.32)定义的投影，则可得

$$\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\| \le \frac{\pi}{2}\|\phi-\phi_N\|, \tag{4.37}$$

$$\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\| \le \frac{2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^3}\|p\|^2\cdot\|(y-y_N)'\|, \tag{4.38}$$

$$\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\| \le \frac{2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^2}\|p\|^2\cdot\|(y-y_N)'\|. \tag{4.39}$$

证明 对于(4.37)，由(4.31)的第二式和(4.32)的第一式可得

$$((\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)',\eta') = ((y-y_N)',\eta') + ((\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y)',\eta') = (\phi-\phi_N,\eta).$$

令 $\eta_N = \tilde{\pi}_N^{1,0}y - y_N$ 可得

$$\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|^2 \le \|\phi-\phi_N\|\cdot\|\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N\| \le \frac{\pi}{2}\|\phi-\phi_N\|\cdot\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|.$$

因此

$$\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\| \le \frac{\pi}{2}\|\phi-\phi_N\|.$$

对于(4.38)，由(4.32)的第二式和(4.31)的第一式可得

$$((\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)',\varphi'_N) + \varepsilon(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N,\varphi_N) + \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2dx\right)(\phi-\pi_N^{1,0}\phi,\varphi)$$

$$= ((\phi-\phi_N)',\varphi'_N) + \varepsilon(\phi-\phi_N,\varphi_N) + \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2dx\right)(\phi-\phi_N,\varphi)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2dx\right)(\phi,\varphi) + \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y_N')^2dx\right)(\phi_N,\varphi) + \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2dx\right)(\phi-\phi_N,\varphi)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (y_N'+y')(y_N'-y')(\phi_N,\varphi)dx.$$

在上式中令 $\varphi_N=\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N$ 并由引理 4.5 和(4.36)可得

$$(\frac{2}{\pi})^2\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|^2+\varepsilon\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|^2\le\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\|^2+\varepsilon\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|^2 \tag{4.40}$$

$$\le\frac{2}{\pi}\|y_N^{'}+y'\|\cdot\|y_N^{'}-y'\|\cdot\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|\cdot\|\phi_N\|.$$

因此由(4.35)可知

$$(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|^2\le\frac{2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)}\|p\|\cdot\|(y-y_N)'\|\cdot\|\phi_N\|\le\frac{2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^2}\|p\|^2\cdot\|(y-y_N)'\|.$$

也即

$$\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|\frac{2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^3}\|p\|^2\cdot\|(y-y_N)'\|.$$

事实上，由 Poincare 不等式和(4.40)可得

$$\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\|\frac{\pi}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^2}\|p\|^2\cdot\|(y-y_N)'\|.$$

证明完毕.

定理 4.6 若 $(\phi,y),(\phi_N,y_N)$ 分别是(2.2)(2.3)的解，且 $\frac{\pi\|p\|^2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^3}<1$，则可得

$$\|(y-y_N)'\|\le CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}, \tag{4.41}$$

$$\|\phi-\phi_N\|\le CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}, \tag{4.42}$$

$$\|(\phi-\phi_N)'\|\le CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{1-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}. \tag{4.43}$$

证明 由引理 4.6 和三角等式可得

$$\|(\widetilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|^2\le\frac{\pi}{2}\|\phi-\phi_N\|\le\frac{\pi}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{\pi}{2}\|\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N\|$$

$$\le\frac{\pi}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{\pi\|p\|^2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^3}\|y'-y_N^{'}\|$$

$$\le \frac{\pi}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{\pi\|p\|^2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^3}(\|(y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)'\|+\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|).$$

也即

$$(1-\frac{\pi\|p\|^2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^3})\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\le\frac{\pi}{2}\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\frac{\pi\|p\|^2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^3}\|(y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)'\|.$$

因此，当 $\frac{\pi\|p\|^2}{(\varepsilon+(\frac{2}{\pi})^2)^3}<1$ 时，有

$$\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\le C(\|\phi-\pi_N^{1,0}\phi\|+\|(y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)'\|). \tag{4.44}$$

由(4.33)可知

$$\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\le CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}.$$

由(4.44)和三角不等式可得

$$\|(y-y_N)'\|\le\|(y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)'\|+\|(\tilde{\pi}_N^{1,0}y-y_N)'\|\le C(\|\phi-\tilde{\pi}_N^{1,0}\phi\|+\|(y-\tilde{\pi}_N^{1,0}y)'\|)$$
$$\le CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}.$$

即(4.41)成立.

由(4.33)和(4.38)可得

$$\|\phi-\phi_N\|\le CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}\ .$$

由 (4.39)可得

$$\|(\phi-\phi_N)'\|\le\|(\phi-\pi_N^{1,0}\phi)'\|+\|(\pi_N^{1,0}\phi-\phi_N)'\|\le CN^{1-m}|y|_{H^{m;N}(\Lambda)}+CN^{1-m}|\phi|_{H^{m;N}(\Lambda)}.$$

所以 (4. 43) 成立. 证明完毕.

4. 2. 4 数值结果

在这部分用数值算例来说明上述求解方案的可行性. 取 $\varepsilon=2.0$，$\omega=0.7600836$ 和[26]的有限元估计的数值结果做比较. y 和 ϕ 的最大误差分别在表(4.2)和(4.3)中给出，由表中数据可以看出，本节中的求解方案比有限元估计要好的多.

例 **4.3** $p(x)=-4\sin(x)$.

接下来考察谱逼近的离散误差,并让迭代至 $|\xi_{i+1}-\xi_i|\le 10^{-15}$. 图 4.3 给出的是半 log 尺度下计算 $y(x)$ 和 $\phi(x)$ 所得到的 L^2 和 H^1 误差随 N 的变化情况. 由图可见误差关于 N 呈指数收敛,这与理论分析的结果是相一致的.

表 4.2: y 的最大误差.

节点个数	有限元方法[26]	节点个数	谱方法
11	1.6e-05	7	1.4e-05
21	9.9e-07	9	6.0e-08
41	6.1e-08	11	1.9e-10
81	3.0e-09	13	3.7e-12

表 4.3: ϕ 的最大误差.

节点个数	有限元方法[26]	节点个数	谱方法
11	8.2e-03	7	5.2e-05
21	2.1e-03	9	3.3e-07
41	5.1e-04	11	1.4e-09
81	1.3e-04	13	7.7e-12

然而在大多数情况下(3.8)的精确解是难以求出的,甚至是不存在的. 可以采用上述方法进行数值求解.

例**4.4** $p(x)=-e^x$.

例**4.5** $p(x)=-x^2-1$.

这里 $\omega=0.7600836$, $N=30$. 当 $|\xi_{i+1}-\xi_i|\le 10^{-15}$ 迭代终止. 图 4.4 给出了当 $p(x)=-e^x$, $p(x)=-x^2-1$ 时 ϕ 和 y 的数值结果.

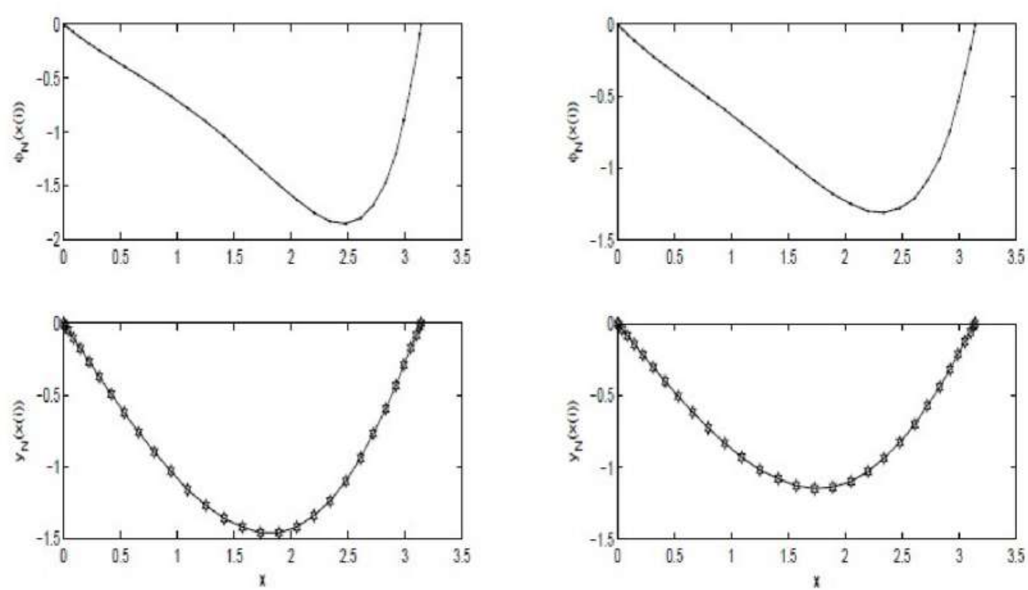


图 4.4 取 $N=30$，$p(x)=-e^{x}$（左）和 $p(x)=-x^2-1$（右）时 ϕ 和 y 的数值解.

第 5 章 结论

5.1 研究总结

本文的主要研究内容主要包括如下几个部分:

• 分别利用 Newton 型迭代算法和简单迭代算法, 给出了吊桥模型的有限元、有限差分、Legendre-Galerkin 谱逼近的数值求解方案, 并利用数值算例说明了算法的可行性.

• 分别利用 Newton 型迭代算法和简单迭代算法, 给出了铰链梁模型的紧差分、Legendre-Galerkin 谱逼近的数值求解方案, 并利用数值算例说明了算法的可行性.

通过以上数值算例表明: 有限元, 有限差分, 谱方法是科学计算强有力的工具, 不仅在微分方程数值求解适用, 而且适合部分积分方程. 在同样的条件下, 谱方法的精度比有限元, 有限差分要高即在节点个数相同的情况下, 谱方法的收敛速度更快.

在非线性积分方程中, 非线性的巧妙处理可以大大提高计算效率. 从中说明了, Newton 型迭代法的收敛速度高于一般的迭代法. 由数值结果表明和理论分析的一致性.

参考文献

[1] 边保军，姜礼尚. 数学物理简明教程. 北京：高等教育出版社, 2012

[2] 汤怀民，胡健伟. 微分方程数值解法. 北京：科学出版社, 2007

[3] 李荣华. 偏微分方程数值解法. 北京：高等教育出版社, 2005

[4] 孙志忠. 偏微分方程数值解法. 北京：科学出版社, 2012

[5] T, J, R. The finite element method:linear static and dynamic finite element analysis, 2000, volume65, Dover publications

[6] Zienkiewicz O C, Taylor R L and Taylor R T. The finite element method for solid and structural mechanics , volume 2, Butterworth-Heinemann, 2005

[7] Gottlieb DaviD and Steven A. Orszag. Numerical analysis of spectral method: theory and Applications. Capital city press, Montpelier, Vermont, U.S.A,1977

[8] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A and Zang T A. Spectral methods in fluid dynamics. 1988

[9] Streett C L and Macaraeg M G. Spectral multi-domain for large-scale fluid dynamic simulations. Applied Numerical Mathematics, 1989, 6(1-2):123–139

[10] McCrory R Land Orszag S A. Spectral methods for multi-dimensional diffusion Problems. Journal of Computational Physics, 1980, 37(1):93–112

[11] Jiang Y J. On spectral methods for volterra-type integro-differential equations. Journal of computational and applied mathematics, 2009, 230(2):333–340

[12] Yalcinbas S, Sezer M and Sorkun H H. Legendre polynomial solutions of high-order linear fredholm integro-differential equations. Applied Mathematics and Computation, 2009, 210(2):334–349

[13] Dehghan M and Shakeri F. Solution of parabolic integro-differential equations arising in heat conduction in materials with memory via he’s variational iteration technique. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2010, 26(6):705-715

[14] Lakestani M and Dehghan M. Numerical solution of fourth-order integro-differential equations using chebyshev cardinal functions. International Journal of Computer Mathematics, 2010 87(6):1389–1394

[15] Shen J and Tang T. Spectral and high-order methods with applications. Science Press, 2006

[16] Shen J, Tang T, and Wang L L. Spectral methods: algorithms, analysis and applications. Springer, 2011.

[17] Gottlieb D and Orszag S A. Numerical analysis of spectral methods. SIAM, 1983

[18] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A and Zang T A. Spectral methods. Springer, 2006

[19] Karman T and Biot M A. Mathematical methods in engineering, volume 8. McGraw-Hill New York, 1940

[20] Brezzi F(Franco) and Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. Springer-Verlag, 1991

[21] Semper B. Finite element methods for suspension bridge models. Computers and Mathematics with Applications, 1993, 26(5):77-91

[22] Semper B. Finite element approximation of a fourth order integro-differential equation. Applied Mathematics Letters, 1994, 7(1):59-62

[23] Sherman A H. On newton-iterative methods for the solution of systems of nonlinear equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, 15:755–771

[24] FEIREISL E. Exponential attractors for non-autonomous systems: Long-time behaviour of vibrating beams. Mathematical methods in the applied sciences,1992, 15(4):287-297

[25] Woinowsky-Krieger S. The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. J.appl. Mech, 1950, 17(1):35-36

[26] SHIN J Y. Finite-element approximation of a fourth-order differential equation. Computers and Mathematics with Applications,1998,35(8):95-100

[27] Ohm M R, Lee H Y and Shin J Y. Error estimates of finite-element approximations for a fourth-order differential equation. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 52(3-4):283-288

[28] Dang Q A and Luan V T. Iterative method for solving a nonlinear fourth order boundary value problem. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 60(1):112-121

[29] Larsson S and Thom′ee V. Partial differential equations with numerical methods, volume 45. Springer, 2008

[30] Kusraev A G. Discrete maximum principle. Mathematical Notes, 1983, 34(2):617-620

[31] Magenes E and Lions J L. Problµemes aux limites non homogµenes et applications. Dunod, 1968

[32] Samarskii A A. The theory of difference schemes Marcel Dekker, 2001

[33] Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems. North Holland, volume 4, 1978

[34] Shen J. Efficient spectral-Galerkin method. I: Direct solvers of second-and fourth-order equations using Legendre polynomials. SIAM J. Sci. Comput, 1994, 15(6):1489-1505

[35] Zhuang Q Q and Xu C J. Legendre-Laguerre coupled spectral element methods for second and fourth-order equations on the half line. Journal of Computational and Applied Mathematic 2010, 235(3):615-630

[36] 庄清渠，任全伟．一类四阶微积分方程的差分迭代解法. 华侨大学学报：自然科学版，2012, 33(6):709-714

[37] Shen J. Remarks on the pressure error estimates for the projection methods. Numerische Mathematik, 1994, 67(4):513–520

致 谢

时光荏苒，转眼间在华侨大学的三年时光已匆匆走过，从中让我成长了很多，感谢三年来有你们一路陪伴.

首先，我衷心的感谢我的导师庄清渠老师. 您严谨的治学精神，渊博的专业知识和精益求精的工作作风，深深地感染、激励着我使我受益匪浅，终生难忘. 从论文的选题到完成，您始终都给予我悉心的指导和不懈的支持. 三年来，您不仅在学习上给我精心的指导，同时还在思想和生活上给予我无微不至的关怀，在此谨向庄老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意！

感谢华侨大学数学学院张金顺，黄心中，黄浪扬，蔡耀雄，沈淑君，林增强，宋海洲，罗正华等老师三年来对我的辛苦培养，您的谆谆告诫都深深的影响着我，鼓励着我前进.

感谢我的同窗吴胜、李敏及一起愉快的度过研究生生活的同学们给予我学习和生活上的帮助.

最后，我还要感谢抚养我长大含辛茹苦的父母和我的兄弟姐妹及我的女朋友刘娜对我生活的关心和学习的支持，谢谢你们！

个人简历、在学期间发表的学术论文

个人简历:
出生年月日: 1987 年 06 月 16 日
获得学士学位学校、时间: 周口师范学院、2010 年 06 月
籍贯: 河南省周口市
政治面貌:中共党员
教育经历: 2003.09-2006.07 鹿邑县第一高级中学

2006.09-2010.07 周口师范学院 数学与信息科学系 数学与应用数学专业
2010.09-2013.07 华侨大学 数学科学学院 基础数学专业

在学期间发表的学术论文:
1 任全伟, 庄清渠. 一类四阶微积分方程的 Legendre-Galerkin 谱逼近.(已在《计算数学》第 35 卷第 2 期发表).
2 庄清渠, 任全伟. 一类四阶微积分方程的差分迭代解法. (已在华侨大学学报自然科学版, 第 33 卷第 6 期发表).
3 任全伟, 庄清渠. 一类四阶微积分方程的有限元逼近. (已被福州大学学报自然科学版录用).
4 任全伟, 庄清渠. 一类四阶微积分方程的紧差分格式. (已被华侨大学学报自然科学版录用).
5 Qingqu Zhuang, Quanwei Ren. Numerical approximation of a nonlinear fourth-order integro-differential equation by spectral method(revised).(已投 Applied Mathematics and Computation).
6 庄清渠, 任全伟.一类具有非线性边界条件的四阶方程的紧差分迭代解法.(已投稿).